



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

Présentée et soutenue par :

Patrice ANTOINETTE

le vendredi 15 juin 2012

Titre :

Techniques de robustesse et d'auto-séquencement pour la commande
auto-adaptative des aéronefs

École doctorale et discipline ou spécialité :

EDSYS : Automatique 4200046

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA CSDV

Directeur(s) de Thèse :

M. Gilles FERRERES

Jury :

Mme Caroline BERARD - Présidente du jury

M. Jamal DAFFOUZ - Rapporteur

M. Patrick FABIANI - Membre du jury

M. Gilles FERRERES - Directeur de thèse

M. Christophe PRIEUR - Rapporteur

Techniques de robustesse et
d'auto-séquencement pour la commande
auto-adaptative des aéronefs.

Patrice ANTOINETTE

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à Monsieur Germain GARCIA et Madame Sophie TARBOURIECH pour m'avoir aidé à mener à bout mon projet de thèse.

Je remercie aussi Monsieur Gilles FERRERES qui est à l'origine du sujet de thèse pour m'avoir proposé celui-ci, et l'avoir encadré.

Je remercie aussi l'ensemble des personnes de l'école doctorale EDSYS, et en particulier Madame Caroline BERARD pour m'avoir permis de clôturer ma thèse.

Je remercie également les rapporteurs Monsieur Christophe PRIEUR et Monsieur Jamal DAAFOUZ pour leurs relectures pertinentes.

Merci aux doctorants de l'Onera.

Merci aux chercheurs du DCSD, et particulièrement Patrick FABIANI, Catherine TESSIER, et bien sûr Jean-François GABARD pour les indispensables cours de danse.

Merci à l'ensemble du personnel de l'Onera qui a grandement facilité les différentes démarches au cours de la thèse.

Merci à ma famille et à Nérissa pour m'avoir vivement soutenu tout au long de mon travail de thèse.

Table des matières

Notations	10
Résumé général	12
1 Introduction	13
1.1 Problématique générale	13
1.2 Etudes des méthodes existantes	14
1.2.1 Les méthodes de commande linéaire	15
1.2.2 Les méthodes de commande par gains séquencés	16
1.2.3 Les méthodes de commande adaptative	16
1.3 Bilan	22
1.4 La démarche	25
1.4.1 La situation	25
1.4.2 Position du problème	26
1.4.3 Une modélisation du schéma avec des LFTs	26
1.4.4 Les étapes de la démarche	27
1.4.5 Présentation des travaux	28
2 Introduction à la robustesse	29
2.1 Quelques éléments sur la stabilité et les performances	29
2.1.1 Espaces et normes	29
2.1.2 La stabilité	34
2.1.3 Les performances	35
2.2 Quelques éléments sur les Transformations Linéaires Fraction-	
naires	37
2.2.1 Définitions	37
2.2.2 Minimalité	39
2.2.3 Modélisation des incertitudes par LFT	39
2.3 Quelques éléments sur la μ -analyse	42
2.3.1 Cas où Δ n'est pas structuré	43
2.3.2 Cas où Δ est structuré et constant, et M est constant .	45

2.3.3	Cas où Δ est structuré, linéaire et stationnaire	48
2.3.4	Cas où Δ contient des éléments linéaires non-stationnaires	49
2.3.5	Cas où Δ contient des éléments non-linéaires	50
2.3.6	Mesures de performance par μ -analyse	54
2.4	Une technique d'analyse d'une boucle fermée linéaire	56
2.4.1	Introduction	56
2.4.2	Quelques bornes de μ	56
2.4.3	Analyse de stabilité robuste par une technique de balayage fréquentiel : Algorithme de Ferreres et Roos	57
2.4.4	Performance L_2 -robuste	62
3	Synthèse de correcteurs	64
3.1	Quelques éléments sur la synthèse de lois de commande modale	64
3.1.1	La notion de mode	64
3.1.2	La possibilité de placer les valeurs propres	67
3.1.3	Analyse des réponses temporelles dans la base modale	68
3.1.4	La synthèse de gains pour la commande modale	73
3.2	Synthèse d'un gain séquencé sous forme LFT	73
3.2.1	Interpolation de plusieurs correcteurs	74
3.2.2	Méthodes LPV via LMI	75
3.2.3	Synthèse convexe	75
3.2.4	La synthèse de gains pour la commande modale séquencée	77
3.2.5	Bien posé du résultat dans le cas d'un gain statique et d'incertitudes constantes	80
4	Quelques éléments sur deux méthodes d'estimation paramétrique	82
4.1	Présentation	82
4.1.1	Les observations	82
4.1.2	Le modèle	85
4.2	Caractérisation des estimateurs	87
4.3	La méthode des moindres carrés	88
4.3.1	Présentation de la méthode	88
4.3.2	Effet du bruit	90
4.3.3	Comportement asymptotique	91
4.3.4	Moindres carrés récursifs	92
4.4	Estimation à erreur bornée	95
4.4.1	Principe de l'estimation à erreur bornée (le cas scalaire)	95
4.4.2	Réduction de bande	98

4.4.3	Englober l'intersection dans une ellipsoïde	99
4.4.4	Algorithme d'estimation	101
4.4.5	Le cas vectoriel : le problème de l'intersection de plusieurs ellipsoïdes	101
4.5	Filtrage des données	104
4.5.1	Reconstruction de la dérivée de l'état	104
4.5.2	Filtrage des perturbations	104
4.6	Estimation et stabilité du schéma adaptatif	105
5	Démarche de l'étude théorique	107
5.1	Introduction	107
5.2	Mise sous forme LFT du procédé	108
5.2.1	Mise sous forme LFT de $H(s, \theta)$	108
5.2.2	$H(s, \theta)$: une représentation d'état structurée	109
5.3	Choix d'une technique de synthèse d'un correcteur séquencé	111
5.3.1	Synthèse du correcteur LFT	111
5.3.2	Choix réalisé	112
5.4	Analyse de la boucle fermée auto-séquencée	113
5.4.1	Mise sous forme LFT de l'ensemble du schéma adaptatif	113
5.4.2	Analyse de la BF de type LFT en présence d'incertitudes Constantes et d'incertitudes Non-Linéaires	115
5.4.3	Etude du schéma auto-adaptatif hors-ligne	116
5.4.4	Conclusion de l'analyse	118
5.5	Choix d'un estimateur	118
5.5.1	Estimation de la représentation d'état structurée	118
5.5.2	Prise en compte des conditions établies lors de l'analyse	119
5.5.3	Conclusion sur le choix de l'estimateur	120
6	Application au modèle linéarisé d'un avion	121
6.1	Présentation de l'application	121
6.1.1	Etude de la boucle ouverte	122
6.1.2	Cahier des charges	123
6.2	Synthèse d'un correcteur non séquencé	124
6.2.1	Synthèse sans intégrateur	124
6.2.2	Synthèse avec intégrateur pour annuler l'erreur statique	126
6.2.3	Influence d'une incertitude sur les paramètres	130
6.3	Justification du choix des paramètres de séquencement	132
6.4	Synthèse du correcteur auto-séquencé	133
6.5	Analyse de la robustesse	136
6.5.1	La stabilité robuste	136
6.5.2	Performance L_2 Robuste	136

6.6	Synthèse de l'estimateur	137
6.6.1	Evaluation de l'erreur de sortie pour l'estimateur à er- reur bornée	138
6.6.2	Utilisation des estimateurs	139
6.6.3	Choix des paramètres des estimateurs	139
6.7	Simulations temporelles	140
6.7.1	Une première simulation	140
6.7.2	D'autres simulations	141
6.8	Conclusion de l'application	143
7	Discussion et Conclusion	159
7.1	Discussion	159
7.2	Conclusion	160
	Appendices	162
A	Opérations sur les LFTs	163
A.1	Transposition	163
A.2	Addition	163
A.3	Multiplication	163
A.4	Concaténation	164
A.5	Juxtaposition	164
A.6	Inversion	164
B	Un contre exemple	165
C	Un exemple différenciant les normes 2 et Lipschitzienne	167

Table des figures

1.1	Schéma présentant la problématique générale	14
1.2	Schémas de la commande adaptative	21
1.3	Schéma de commande pour un correcteur MRAC	23
1.4	Schéma de commande pour un correcteur MRAC	23
1.5	Schéma global de la commande auto-adaptative indirecte. θ représente les paramètres du procédé, $\hat{\theta}$ une estimation de θ , $H(s, \theta)$ représente le procédé, et $K(s, \hat{\theta})$ représente le correcteur.	25
1.6	Schéma de commande auto-adaptative dans le cas d'une modélisation par LFT. $K_{aug}(s)$ représente la partie du correcteur synthétisée hors ligne. $\Delta_h(\theta)$ et $\Delta_k(\hat{\theta})$ représentent les dépendances respectivement par rapport au paramètre θ et au paramètre estimé $\hat{\theta}$ modélisées sous forme LFT.	27
2.1	Schéma de la forme standard	35
2.2	Schéma pour l'analyse d'une marge de stabilité L_{2r}	36
2.3	Représentations des LFT.	38
2.4	Exemple de dynamique négligée additive.	41
2.5	Exemple de dynamique négligée multiplicatives en entrée et en sortie.	41
2.6	Exemple de dynamique négligée représentée par une « multiplication en retour de sortie ».	41
2.7	Interconnexion sous forme LFT	42
2.8	1 ^{ère} version du théorème des petits gains	43
2.9	2 ^{ème} version du théorème des petits gains	43
2.10	Schémas de la μ -analyse	46
2.11	Schémas pour ν -analyse	47
2.12	Schémas pour une analyse de robustesse.	55
2.13	Interconnexion sous forme LFT	58
2.14	Schémas pour une analyse de robustesse.	62
3.1	Schéma de la boucle fermée avec et sans transfert direct	65

3.2	Diagramme dans la base modale résumant le transfert de l'excitation (f) vers l'état (x).	68
3.3	Diagramme dans la base modale	69
3.4	Diagramme dans la base modale	70
3.5	Diagramme dans la base modale	71
3.6	Diagramme dans la base modale	71
3.7	Représentation sagittale d'un exemple de découplage entre les entrées et les modes, et entre les modes et les sorties.	71
3.8	Boucle fermée pour la synthèse convexe.	76
3.9	Représentation graphique de la boucle fermée, mettant en exergue les éléments que l'on cherche à synthétiser dans la synthèse convexe.	77
4.1	Modèle MA	86
4.2	Modèle AR	86
4.3	Modèle ARMA	86
4.4	Modèle ARMAX	86
4.5	Modèle général	87
4.6	Modèle à erreur de sortie	87
4.7	Exemple de représentation graphique de l'ensemble $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$ dans le cas où $n = 2$	96
4.8	Exemple de représentation graphique de l'ensemble $\mathcal{B}(2)$ dans le cas où $n = 2$	97
4.9	Exemple de représentation graphique, illustrant l'utilité d'une réduction de bande dans le cas où $n = 2$	98
5.1	Schéma de commande auto-adaptative dans le cas d'une modélisation par LFT. $K_{aug}(s)$ représente la partie du correcteur synthétisée hors ligne. $\Delta_h(\theta)$ et $\Delta_k(\hat{\theta})$ représentent les dépendances respectivement par rapport au paramètre θ et au paramètre estimé $\hat{\theta}$ modélisées sous forme LFT.	107
5.2	Schéma pour la synthèse du « correcteur séquencé », où θ est le paramètre de séquençement.	111
5.3	Schéma de commande auto-adaptative mettant en évidence l'erreur d'estimation.	114
5.4	Schéma pour la validation du schéma auto-adaptatif.	115
6.1	Position des pôles en boucle ouverte.	123
6.2	Schéma de la boucle fermée avec un correcteur statique non-séquencé.	124

6.3	Position des pôles en boucle fermée, avec un correcteur statique non séquentiel.	127
6.4	Position des pôles en boucle fermée.	127
6.5	Schéma de la boucle fermée.	128
6.6	Position des pôles en boucle fermée.	129
6.7	Position des pôles en boucle fermée.	129
6.8	Evolution des éléments de la matrice A en fonction de la vitesse.	130
6.9	Evolution de la position des pôles avec la vitesse. En bleu, les positions obtenues avec une vitesse plus faible, et en rouge celles obtenues avec une vitesse plus élevée. Les pôles en vert correspondent à $Mach = 0.2$	131
6.10	Evolution des réponses indicielles en boucle fermée avec la vitesse. En bleu, les réponses obtenues avec une vitesse plus faible, et en rouge celles obtenues avec une vitesse plus élevée. La réponse en vert correspond à $Mach = 0.2$	132
6.11	Evolution du dépassement maximal en fonction de la vitesse.	133
6.12	Evolution de $\left \frac{J(\vec{v}_{par}) - J(\vec{v}_{par0})}{J(\vec{v}_{par0})} \right $ en fonction de l'évolution de chacun des paramètres.	134
6.13	Schéma utilisé pour la synthèse du gain LFT.	135
6.14	Variation de la borne supérieure de la norme L_2 induite du transfert du canal de performance, en fonction de la norme $\ \cdot\ _2$ du transfert de l'erreur d'estimation relative (Δ_δ) maximale autorisée, en supposant que cette dernière est LTV.	137
6.15	Schéma pour la recherche d'une borne supérieure de l'erreur sur l'estimation.	139
6.16	Schéma de la simulation temporelle. (BOZ=Bloqueur d'Ordre Zero)	140
6.17	Réponses temporelles	141
6.18	Evolution des estimations pendant la simulation.	142
6.19	Erreur d'estimation relative.	143
6.20	Estimation de tous les paramètres	144
6.21	Evolution temporelle de α et q	145
6.22	Evolution des estimations pendant la simulation.	146
6.23	Erreur d'estimation relative.	147
6.24	Estimation de tous les paramètres	148
6.25	Evolution des estimations pendant la simulation.	149
6.26	Evolution temporelle de α et q	150
6.27	Erreur d'estimation relative.	151
6.28	Estimation de tous les paramètres	152
6.29	Evolution des estimations pendant la simulation.	153

6.30	Evolution temporelle de α et q .	154
6.31	Erreur d'estimation relative.	155
6.32	Estimation de tous les paramètres	156
6.33	Evolution des estimations pendant la simulation.	157
6.34	Evolution temporelle de α et q .	158
C.1	Représentation graphique de u_∞ .	168
C.2	Représentation graphique de u_k .	168

Notations

M^T	Transposée de la matrice M
M^*	Transposée conjuguée de la matrice M
I	Matrice identité
M^{-1}	Inverse de la matrice M
$M > 0$	M est définie positive
$\mathcal{F}_u(M, \Delta)$	LFT haute du couple (M, Δ) (cf. page 37)
$\mathcal{F}_l(M, \Delta)$	LFT basse du couple (M, Δ) (cf. page 37)
$M \otimes \Delta$	Autre notation pour $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$
$M \star N$	Produit de Redheffer entre M et N (cf. page 38)
$\det(M)$	déterminant de la matrice carrée M
$\text{Trace}(M)$	Trace de la matrice M (somme des termes diagonaux)
$\lambda(M)$	valeur propre de M
$\bar{\lambda}(M)$	plus grande valeur propre de M
$\bar{\lambda}(A, B)$	$= \sup\{\gamma \in \mathbb{R} \det(A - \gamma B) = 0\}$
\bar{z}	valeur conjuguée du nombre complexe z
$\text{Re}(z)$	partie réelle de z
$E[\cdot]$	Fonction espérance
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs

<i>angl.</i>	Précède une expression en langue anglaise, afin d'expliquer un sigle ou un acronyme anglais, ou d'indiquer une appellation courante telle qu'on peut la trouver dans la littérature scientifique.
BIBO	Entrée Bornée Sortie Bornée (<i>angl.</i> Bounded Input Bounded Output)
LFT	Transformation Linéaire Fractionnaire (<i>angl.</i> Linear Fractional Transformation)
LTI	Linéaire et stationnaire (<i>angl.</i> Linear Time Invariant)
LTV	Linéaire (et non-stationnaire) (<i>angl.</i> Linear Time Varying)
s.s.v.	Valeur Singulière Structurée (<i>angl.</i> Structured Singular Value)

Résumé général

Pour synthétiser un correcteur robuste pour un système linéaire incertain, il existe de nombreuses méthodes linéaires. Cependant, bien souvent, le gain en robustesse se fait au détriment de la performance. Aussi, dans cette thèse, on s'intéresse à la situation où la plage des valeurs possibles des paramètres est « très grande » par rapport à la « faible » variation du niveau de performance souhaitée. Dans cette situation, il peut alors s'avérer intéressant d'utiliser des correcteurs séquencés. Seulement, la mise en place de cette solution nécessite que le correcteur ait à sa disposition les paramètres sur lesquels il sera séquencé. Et il peut arriver que l'on ne souhaite pas (à cause de considérations de réalisation pratique), ou que l'on ne puisse pas disposer de la mesure de ces paramètres. On est alors amené à estimer ces paramètres et donc à utiliser le paradigme de la commande adaptative.

Dans cette thèse, on cherche à proposer une méthodologie de synthèse d'un correcteur auto-adaptatif afin de résoudre un problème de commande robuste d'un procédé linéaire incertain. Après une étude théorique ayant pour objectif de proposer une telle méthodologie, le cas d'un avion instable est traité à titre d'application, permettant ainsi de mettre en évidence le bénéfice que la stratégie proposée peut apporter à la commande d'un système incertain.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problématique générale

Dans l'Encyclopædia Universalis, il est proposé de définir l'Automatique comme « l'ensemble des méthodes mathématiques permettant d'apporter des solutions à des idéalizations mathématiques de problèmes posés par l'automatisation, et visant à produire des méthodes concrètes pour la solution de ceux-ci, généralement sous la forme d'algorithmes numériques ». Notamment, une des branches de l'Automatique consiste donc à proposer des systèmes dynamiques appelés « correcteurs » afin de commander un autre système dynamique que l'on appellera ici « procédé ». On dit que l'on « synthétise des correcteurs ». Bien souvent, les procédés sont des systèmes physiques modélisés par des équations différentielles dont on maîtrise certaines grandeurs et dont certains signaux sont mesurés.

Pour réaliser la synthèse de ces correcteurs, différentes stratégies sont possibles. Le choix d'une stratégie est fonction entre autres de la « nature » du modèle dont on dispose, du procédé. Ainsi, pour les systèmes physiques obéissant à une équation différentielle linéaire à coefficients invariants dans le temps (c'est à dire un système linéaire et stationnaire), il est courant d'utiliser des techniques de « commande linéaire ».

Dans cette thèse, on s'intéresse au problème particulier de synthétiser un correcteur pour un procédé linéaire et stationnaire, mais dont certains *paramètres* sont mal connus (*incertains*). De manière plus précise, on considère que ces paramètres sont des nombres réels, et qu'il y en a un nombre fini. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ le nombre de ces paramètres, et notons θ le vecteur regroupant tous les paramètres dont dépend le modèle du procédé. On peut donc écrire

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T \tag{1.1}$$

où pour tout $i \in [1, n]$, θ_i est un paramètre. De plus, on suppose que pour chacun des paramètres θ_i , on connaît la plus grande ($\theta_{i,max}$) et la plus petite valeur ($\theta_{i,min}$) atteignable. On peut alors noter $H(s, \theta)$ le modèle du procédé que l'on cherche à commander, où s représente la variable de Laplace.

La recherche du correcteur s'effectue en considérant la situation représentée par le schéma de la FIGURE 1.1.

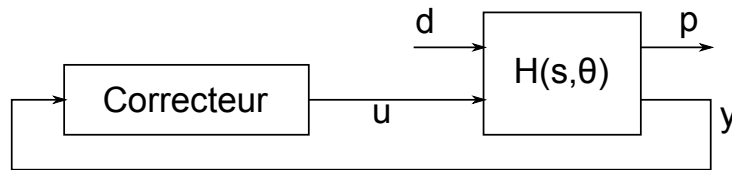


FIGURE 1.1 – Schéma présentant la problématique générale. Le procédé $H(s, \theta)$ est linéaire et stationnaire. θ est un vecteur de paramètres incertains. Pour une valeur de θ fixée, $H(s, \theta)$ est un système linéaire et stationnaire.

De plus,

1. on fait l'hypothèse que l'on ne « peut » pas mesurer les paramètres θ_i , mais qu'il est possible de les estimer à partir des entrées et des sorties du procédé,
2. on souhaite que le correcteur réalise un même niveau de performance (ou une « faible variation » de performance) pour toutes les valeurs de θ_i ,
3. on considère que la plage de variation des θ_i est « très grande » par rapport au niveau de performance souhaité.

1.2 Etudes des méthodes existantes

Pour traiter ce type de problème, il est courant d'utiliser des techniques dites de « commande robuste », afin de réaliser des correcteurs « robustes » vis-à-vis des incertitudes de modèle. Un correcteur est dit *robuste* s'il garantit que les signaux sont bornés en présence d'une classe « raisonnable » de dynamiques négligées et de perturbations bornées aussi bien que des bornes sur l'erreur de performance qui sont fonction de l'ordre de l'erreur de modélisation.

1.2.1 Les méthodes de commande linéaire

Pour synthétiser un correcteur linéaire robuste, plusieurs méthodes existent. Tout d'abord, on peut rappeler l'existence des méthodes « classiques » comme le correcteur de type PID (Proportionnel Intégral Dérivé). Il s'agit probablement d'une des méthodes théoriques les plus anciennes [58]. Parmi les méthodes les plus récentes, on peut citer des méthodes utilisant différents critères de synthèse, comme

- le placement de pôle.
- les critères H_∞ ou H_2

Pour un critère, ou un type de correcteur donné, la robustesse des correcteurs peut être traitée de différentes manières. Schématiquement, on pourrait considérer deux types de méthodes.

Le premier consiste à choisir le modèle (unique) sur lequel se fera la synthèse du correcteur. En effet, afin d'obtenir un correcteur robuste, il peut être plus pertinent de synthétiser le correcteur non pas sur le modèle nominal mais sur un « modèle modifié ». Ce modèle modifié peut par exemple être un modèle du procédé sur lequel on sait a priori que le correcteur produira la plus mauvaise performance. Souvent on dit que l'on choisit un modèle « pire cas ». Il suffit alors de synthétiser le correcteur sur ce modèle « pire cas » pour garantir les performances sur les autres cas. Ce modèle modifié peut aussi consister en l'ajout d'autres systèmes dynamiques qui permettent la prise en compte lors de la synthèse de critère de robustesse.

Le deuxième consiste tout simplement à procéder de manière itérative. On réalise tout d'abord une synthèse d'un correcteur sur un modèle initial, pour ensuite analyser ce dernier sur un modèle ou une famille de modèles du procédé. Si cette analyse révèle que le correcteur obtenu ne satisfait pas les performances souhaitées, on réalise à nouveau une synthèse en prenant en compte les informations obtenues dans l'analyse. On procède alors ainsi jusqu'à obtenir le correcteur souhaité.

Les méthodes d'analyse sont diverses. Les plus utilisées sont probablement celles utilisant les critères fréquentiels. Pour garantir une certaine robustesse, on utilise parfois des critères tels que la marge de phase ou la marge de gain en s'aidant de diagramme tels que ceux de Bode, Nyquist ou Black.

Il est aussi possible d'utiliser des méthodes plus analytiques utilisant le critère de Routh, ou le théorème de Lyapunov sur la stabilité et des critères LMI. D'autres théorèmes, comme celui des « petits gains » ou celui sur la « passivité » permettent eux aussi d'analyser la stabilité vis-à-vis d'incertitudes.

On pourra trouver dans [90] un exposé détaillé principalement pour les méthodes utilisant les critères H_∞ ou H_2 , et un exposé plus général dans [1].

Cependant, l'inconvénient des méthodes par commande linéaire robuste, est que lorsque l'on cherche à synthétiser un correcteur satisfaisant pour une « grande » plage de variation des paramètres, pour certaines valeurs de ces derniers, on obtient des performances très inférieures à celles du cas optimal. Aussi, pour pouvoir conserver un bon niveau de performance pour toutes les valeurs possibles des paramètres, on préfère parfois utiliser les méthodes de commande par « gains séquencés ».

1.2.2 Les méthodes de commande par gains séquencés

Pour pouvoir garantir un même niveau de performance sur une plage importante de variation des paramètres, il est possible d'utiliser les méthodes de commande par « gains séquencés ». Cette méthode consiste à proposer pendant le fonctionnement en boucle fermée du procédé et du correcteur, une valeur du correcteur fonction des valeurs mesurées des paramètres. La difficulté de cette méthode est d'une part de garantir la stabilité, et d'autre part de ne pas trop dégrader la performance pendant la phase où le correcteur change de valeur.

Différentes méthodes ont été mises au point pour réaliser des correcteurs séquencés. Parmi les nombreuses méthodes, on peut citer [3] et [55]. Pour une vision globale de l'état de l'art des méthodes de commande par gains séquencés on peut se référer à [69, 52].

Cependant, ces méthodes sont utilisables lorsque la mesure du paramètre sur lequel on cherche à séquencer le correcteur est disponible. Dans le cas contraire, lorsque cette mesure n'est pas disponible, on utilise alors les méthodes de « commande adaptative ».

1.2.3 Les méthodes de commande adaptative

Pour résoudre le problème exposé dans la section 1.1 (page 13), en l'absence de la mesure des paramètres, il est aussi possible d'utiliser une stratégie de commande adaptative. L'usage de cette dernière est bien souvent dédié au maintien au cours du temps d'une performance donnée d'un procédé « variant au cours du temps ». On peut dès à présent mentionner l'importance que revêt la phase de modélisation. En effet, un même système peut être modélisé différemment. Il en découle que les notions de « paramètre » et de « variation au cours de temps » sont relatives. Ceci laisse déjà poindre une difficulté notable pour d'éventuelles définitions, que l'on ne cherchera pas à résoudre, et on se contentera simplement de signaler que cela dépend du point de vue adopté.

Ceci étant, il n'en reste pas moins que quel que soit l'usage que l'on fait

de la commande adaptative, un problème crucial de cette stratégie est de garantir la stabilité pendant une phase que l'on nomme le « régime transitoire ». L'utilisation de la commande adaptative suppose qu'à un moment, le correcteur est potentiellement inadapté. Le régime transitoire est la phase située entre « l'état inadapté » et « l'état adapté ». En effet, une « inadaptation » pendant le régime transitoire d'un correcteur peut conduire à une instabilité, et donc à la détérioration ou la destruction du système (un avion par exemple). Il faut donc assurer la stabilité pendant le régime transitoire, mais cela nécessite alors parfois de faire un compromis avec la performance souhaitée.

Un problème de définition

Une des premières difficultés de la « commande adaptative » réside dans sa définition. En effet, en toute rigueur, on ne pourrait se contenter de définir la commande adaptative comme : « une commande qui s'adapte », car il faudrait alors définir le verbe « s'adapter ». Dans la littérature scientifique spécialisée, il existe peu d'articles proposant une définition de la commande adaptative ([71, 8, 84]). Selon [33], « jusqu'à aujourd'hui, il n'existe pas de définition satisfaisante, qui permettrait de distinguer rigoureusement les systèmes adaptatifs des systèmes qui ne le sont pas ».

Et pourtant, en dépit de cette absence de définition rigoureuse, ce terme est très largement employé en Automatique, avec un certain consensus, et sans explications particulières. Il semble donc cohérent de penser que le sens du mot « adaptatif » en Automatique est très fortement inspiré du sens commun. Pour cela, on se tourne vers « Le Petit Robert de la langue française », où l'on trouve :

« s'adapter : se mettre en harmonie avec (les circonstances, le milieu), réaliser son adaptation biologique ».

On trouve un peu plus de précisions dans l'« Encyclopædia Universalis », pour « adaptation » :

« Utilisée aussi bien dans les sciences biologiques que dans les sciences humaines et sociales, la notion d'adaptation est un outil de compréhension des phénomènes du monde vivant à la fois nécessaire et très débattu. Elle désigne en effet à la fois l'*état* d'un être vivant du point de vue des rapports plus ou moins adéquats au milieu que lui autorise son organisation interne et le *processus* qui permet d'atteindre cette adéquation, qu'il se situe au niveau de l'individu (ontogenèse) ou de l'espèce (phylogenèse).

Un détour par l'étymologie vient confirmer cette double signification originelle. Le mot est construit sur la racine indo-européenne *ap-* signifiant at-

teindre et attacher, qui a donné en latin les verbes *apere* et *aptare*, joindre, dont le participe *aptus*, (bien) attaché, a donné en français « apte à » (et son opposé, *ineptus*, « impropre à »). En se liant au préfixe *ad* marquant l'idée du but ou de visée (*ad-aptare*), la notion est fin prête pour une longue carrière pluridisciplinaire.

Science suprême jusqu'au *XVII^e* siècle, la théologie reconnaissait dans la parfaite adaptation des êtres une preuve de la Providence divine. Ce discours téléologique ou finaliste a dû céder la place aux modèles évolutionnistes, appuyés sur les accidents du milieu et les mutations internes. En biologie, l'idée d'adaptation est donc indissociable de l'idée d'évolution, qu'elle contribue à affiner en relançant incessamment la question du « comment ? ». »

Or, si le sens commun nous éclaire, il ne semble pas suffire pour autant. En effet, beaucoup d'automaticiens souhaitent par exemple établir une distinction entre la « commande adaptative » et un « système à rétroaction ordinaire », car notamment dans [6], Astrom note que « les systèmes à rétroaction ordinaires peuvent aussi faire face à des changements de conditions ». C'est notamment l'avis de Zames dans [88] qui cherche à répondre aux questions suivantes : « Est-il possible de dire si une boîte noire est adaptative ? L'adaptation est-elle synonyme d'une présence d'une rétroaction non linéaire ? ». Dans cet article, la définition obtenue n'est pas satisfaisante, mais le raisonnement déployé montre la volonté de distinguer l'adaptation de la rétroaction et met en exergue les difficultés que sa recherche de définition a rencontré.

Pour cette thèse, on adoptera l'approche très « modeste », qui selon [8] a été proposée dans un symposium en 1961, qui consiste à dire qu'« un système adaptatif est un système physique qui a été synthétisé avec un point de vue adaptatif ». Implicitement, cela signifie que l'on considère qu'un correcteur n'est pas « adaptatif » de manière intrinsèque, mais dépend du point de vue de celui qui le synthétise. Ainsi, on considérera que la « commande adaptative » est plus une méthode de synthèse qu'un type de correcteur.

Une brève histoire de la commande adaptative

La recherche dans le domaine de la commande adaptative a une longue histoire d'activités intenses qui impliquent des débats sur la définition précise de la commande adaptative, des exemples d'instabilité, des preuves de stabilité et de robustesse, et des applications.

En commençant au début des années 1950, la synthèse d'autopilotes pour des aéronefs de haute performance motiva une activité de recherche intense en commande adaptative. L'aéronef de haute performance subit des changements significatifs dans ses dynamiques lorsqu'il passe d'un point de vol à un

autre qui ne peuvent être pris en charge par une commande à rétroaction avec un gain constant. Un correcteur sophistiqué, tel qu'un correcteur adaptatif, qui pourrait apprendre et s'accommoder aux changements des dynamiques de l'aéronef était nécessaire. La commande par modèle de référence (MRAC (*angl.* Model Reference Adaptive Control)) a été proposée par Whitaker et al. [66, 87] pour résoudre le problème de commande de l'autopilote. La méthode de sensibilité et la règle MIT sont utilisées pour synthétiser les lois adaptatives des différents schémas de commande adaptative proposés. Un schéma de placement de pôle adaptatif basé sur le problème linéaire quadratique optimal a été suggéré par Kalman dans [44].

Le travail sur la commande adaptative de vol était caractérisée par « beaucoup d'enthousiasme, un mauvais matériel et une théorie inexistante » [4]. Le manque de preuves de stabilité et le manque de compréhension des propriétés des schémas de commande adaptative proposés associé à un désastre dans un test de vol [78] entraîna une atténuation de l'intérêt pour la commande adaptative.

Les années 1960 sont devenues la plus importante période pour le développement de la théorie de la commande et en particulier pour la commande adaptative. Les techniques d'espace d'état et la théorie de la stabilité basée sur la théorie de Lyapunov sont introduites. Les développements en programmation dynamique [11, 12], en commande duale [22] et en commande stochastique en général, et pour l'identification de système et l'estimation de paramètres [7, 85] jouèrent un rôle important dans la reformulation et la reconception de la commande adaptative. En 1966 Parks et d'autres trouvèrent une manière de repenser les lois adaptatives basées sur la règle MIT utilisée pour les schémas MRAC des années 1950 en appliquant l'approche de synthèse de type Lyapunov. Leur travail, même s'il n'est applicable qu'à une classe particulière de système LTI, plante le décor pour d'autres preuves rigoureuses de stabilité en commande adaptative pour des classes de modèles de procédé plus larges.

Les avancées en théorie de la stabilité et les progrès en théorie de la commande dans les années 1960 ont amélioré la compréhension de la commande adaptative et ont contribué à un fort intérêt renouvelé pour le domaine dans les années 1970. D'un autre côté, les progrès en électronique et en informatique qui rendirent possibles l'implémentation de correcteurs complexes, tels que les correcteurs adaptatifs, ont contribué à un intérêt accru pour les applications de la commande adaptative. Les années 1970 sont témoins de plusieurs résultats révolutionnaires pour la synthèse de commandes adaptatives. Les schémas MRAC utilisant l'approche de la synthèse de type Lyapunov sont synthétisés et analysés dans [20, 59, 63]. Les concepts de positivité et d'hyperstabilité sont utilisés dans [49] pour développer une large

classe de schémas MRAC avec des propriétés de stabilité bien établies. Au même moment, des efforts en parallèle pour les procédés en temps discret en environnement déterministe et stochastique ont produit plusieurs classes de schémas de commande adaptative avec des preuves de stabilité rigoureuses [38, 39]. L'excitation des années 1970 et le développement d'une large classe de schémas de commande adaptative avec des propriétés de stabilité bien établies étaient accompagnés par plusieurs applications couronnées de succès [40, 62, 86].

Les succès des années 1970, toutefois, ont rapidement été suivis par des controverses sur l'aspect pratique de la commande adaptative. Dès 1979, il a été mis en exergue que les schémas adaptatifs des années 1970 pouvaient facilement conduire à une instabilité en présence de petites perturbations [20]. Le comportement non robuste de la commande adaptative devint très controversé vers le début des années 1980 lorsque plus d'exemples d'instabilités sont publiés démontrant l'absence de robustesse en présence de dynamiques non modélisées (négligées) ou de perturbations bornées [42, 68]. Cela stimula beaucoup de chercheurs, dont l'objectif était de comprendre les mécanismes des instabilités et de trouver des manières de les neutraliser. Au milieu des années 1980, plusieurs reconceptions et modifications sont proposées et analysées, menant à un domaine de travail nommé la *commande adaptative robuste*.

Le travail sur la commande adaptative robuste continua au cours des années 1980 et eut notamment pour conséquence la compréhension des diverses modifications de la robustesse et leur unification sous un cadre général [20, 43, 41].

La solution au problème de robustesse en commande adaptative a conduit à la solution au problème de longue date de la commande d'un procédé linéaire dont les paramètres sont inconnus et changent au cours du temps. À la fin des années 1980, plusieurs résultats révolutionnaires sont publiés dans le domaine de la commande adaptative pour les procédés variant dans le temps [80].

Le cœur de la recherche en commande adaptative à la fin des années 1980 et au début des années 1990 portait sur les propriétés de performance et sur l'extension des résultats des années 1980 à certaines classes de procédés non linéaires avec des paramètres inconnus. Ces efforts ont conduit à de nouvelles classes de schémas adaptatifs, motivés par la théorie des systèmes non linéaires [45, 46] aussi bien que par les schémas de commande adaptative avec une performance améliorée en régime transitoire et stationnaire [16, 76].

La commande adaptative a une riche littérature pleine de différentes techniques pour la conception, l'analyse, la performance, et les applications. Plusieurs articles d'études [34, 65], de livres et de monographies [20, 39, 40, 42,

49, 61, 80, 85, 86, 77] ont déjà été publiés. En dépit d'une vaste littérature sur le sujet, il y a toujours un sentiment général que la commande adaptative est une collection d'outils techniques et d'astuces sans rapport les uns avec les autres.

Des classifications des méthodes de synthèse

Plutôt que de parler d'une « classification des correcteurs adaptatifs », il est préférable de parler d'une « classification des méthodes de synthèse par un point de vue de commande adaptative ». Il est difficile de trouver une classification permettant une partition rigoureuse de toutes les méthodes de synthèse. Les méthodes de synthèse de commande adaptative peuvent être qualifiées de plusieurs adjectifs : stochastique ou non-stochastique, adaptatif direct ou indirect, dual ou non dual, et bien d'autres.

Direct et Indirect La distinction qui paraît au premier abord la plus simple à établir est la différence entre une commande indirecte et directe. Dans le premier cas, l'adaptation est réalisée à l'aide d'un estimateur, alors que dans le second, cet estimateur n'est pas explicitement présent. Ceci peut être illustré par les schémas de la FIGURE 1.2.

Bien qu'à la vue de ces schémas la distinction semble évidente, en réalité,

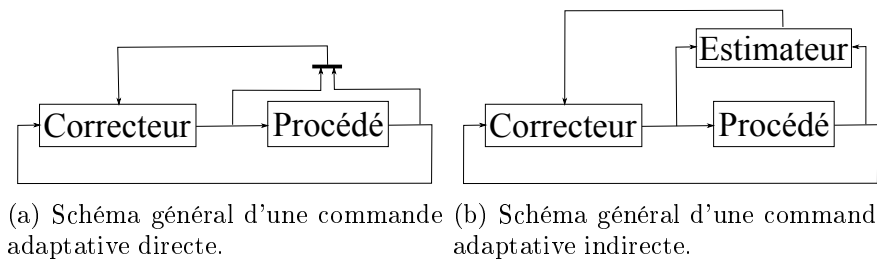


FIGURE 1.2 – Schémas d'ensemble des commandes adaptatives directe (a) et indirecte (b).

on peut montrer que l'on peut toujours considérer qu'un correcteur adaptatif est la combinaison d'un estimateur de paramètres avec une loi de commande. La distinction se fera donc sur le fait que l'estimateur est exprimé de manière explicite ou pas.

Commande adaptative MRAC Comme indiqué précédemment, la commande adaptative avec modèle de référence (MRAC) fut l'un des premiers

schémas proposés. Il a été présenté par Whitaker au MIT à la fin des années 50. Il considérait un problème où les spécifications étaient données en terme d'un modèle de référence qui indiquerait comment la sortie du procédé devrait répondre au signal de commande dans le cas idéal. L'objectif de la commande adaptative par modèle de référence est d'assurer que la sortie du procédé commandé suive la sortie d'un modèle de référence donné, en assurant la stabilité de la boucle fermée. Alors que la commande de référence peut être synthétisée en utilisant la rétroaction de l'état ou de la sortie, la commande par modèle de référence avec rétroaction de la sortie est plus stimulante en théorie et a plus de potentiel pour les applications. Lorsque les paramètres du procédé sont inconnus, les lois adaptatives sont nécessaires pour mettre à jour les paramètres d'un correcteur à modèle de référence. Les principaux problèmes de la commande adaptative par modèle de référence englobent la paramétrisation du correcteur, la dérive de l'erreur de modèle, la spécification a priori de la connaissance du procédé, la synthèse de la loi adaptative, la stabilité, l'asservissement, et l'analyse de la robustesse [77].

Le schéma initial utilisé pour la commande adaptative par modèle de référence est celui de la FIGURE 1.3. Sur ce schéma on peut identifier deux boucles. Une boucle interne, qui constitue la boucle de rétroaction habituelle composée du procédé et du correcteur. Les paramètres du correcteur sont ajustés par une boucle externe de manière à réduire l'erreur e entre la sortie du modèle y_m et celle du procédé y . La boucle externe est donc aussi une boucle de régulation. Le problème principal est de déterminer un mécanisme d'ajustement qui permet d'obtenir un système stable assurant la convergence de l'erreur e vers 0. Ce problème est non trivial, et ne peut être résolu avec une simple rétroaction linéaire allant de la sortie aux paramètres du correcteur (cf. [5]).

Le schéma de la FIGURE 1.4 généralise celui de la FIGURE 1.3.

1.3 Bilan

Pour résoudre le problème présenté dans la section 1.1 (page 13), on a vu qu'il est parfois possible d'utiliser des méthodes de commande linéaire. Des méthodes de synthèse permettent de proposer des correcteurs optimaux selon les critères H_∞ , H_2 , LQG. De même, les méthodes d'analyse permettent de calculer les marges de robustesse de ces correcteurs vis-à-vis d'incertitudes structurées ou non grâce à la μ -analyse. Mais ces méthodes ne permettent pas de prendre en compte de « grandes incertitudes » sur les paramètres.

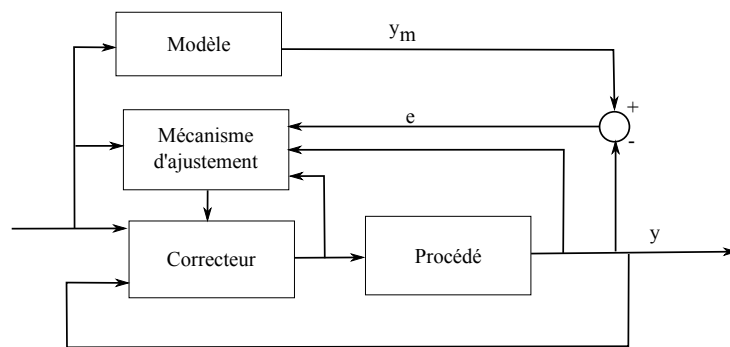


FIGURE 1.3 – Schéma de commande pour un correcteur MRAC

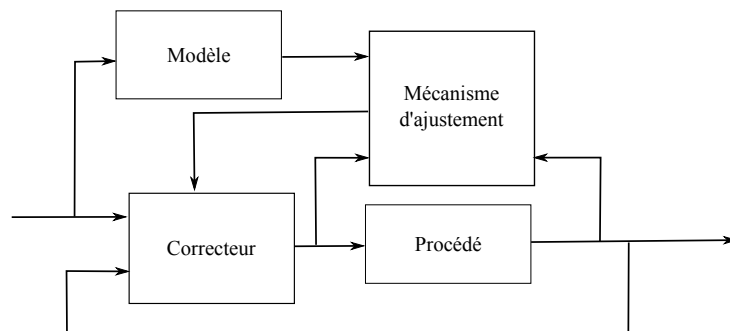


FIGURE 1.4 – Schéma de commande pour un correcteur MRAC

Pour y remédier, on peut alors se tourner vers les méthodes de commande par gains séquencés. Mais, il faut alors disposer de la mesure des paramètres sur lesquels on souhaite séquencer le correcteur. Or, il peut arriver que ces paramètres ne puissent être fournis. Cela se traduit physiquement par le fait que le procédé ne dispose pas de capteur fournissant ces valeurs. Cette absence peut être le résultat d'un choix lors de la conception du procédé ou du correcteur (afin de ne pas augmenter le volume ou la masse du procédé), mais parfois d'une impossibilité « physique » (le paramètre n'est pas mesurable). Dans le problème que l'on traite, on ne dispose d'aucune mesure des paramètres, mais on considère qu'il est possible d'estimer ces derniers à partir de la mesure des entrées et des sorties du procédé. Dans cette situation, on se tourne donc vers les méthodes de commande adaptative, qui sont des méthodes de commande non-linéaire.

Comme nous l'avons vu précédemment, on peut distinguer des schémas de commande adaptative « directe » et « indirecte ».

Les schémas de commande adaptative directe calculent directement la loi de commande à partir des signaux d'entrée et de sortie du procédé. Voir par exemple [10, 67, 15], qui réalise des commandes adaptatives directes à partir du schéma MRAC. Un autre exemple est celui de la technique STAC (Set Theoretic Adaptor Control) qui est basée sur le concept de « falsification » [82, 48, 83].

Mais ce sont les techniques de *commande adaptative indirecte* qui se rapprochent conceptuellement le plus des techniques de commande par gains séquencés.

Des résultats existent sur les problèmes cruciaux que sont la stabilité et la robustesse des correcteurs adaptatifs, voir par exemple [48, 15, 79, 89]. D'un autre côté, il est possible d'utiliser les techniques de type Lyapunov et de passivité issues des outils d'analyse non-linéaire [72, 9].

Il est important de souligner que plusieurs problèmes peuvent être étudiés, comme par exemple la simple stabilité asymptotique du schéma de commande adaptative, la qualité de son régime transitoire (avant que l'estimateur n'ait convergé dans le cas d'une commande indirecte) ou les réponses asymptotiques. Il est possible dans certains cas de prouver la convergence en temps fini du schéma de commande adaptative direct ou indirect [82, 81, 28, 15]. Notons toutefois que maîtriser la réponse transitoire est un problème important en pratique, dont l'absence de prise en compte peut compromettre l'intégrité du procédé (un avion par exemple).

De plus, bien que la commande adaptative soit très populaire, elle est peu utilisée pour les aéronefs. En effet, la principale difficulté est que bien souvent, on ne peut dire que très peu de choses sur le régime transitoire de la boucle fermée auto-adaptative.

Aussi, notre objectif dans cette thèse est d'essayer de proposer une méthodologie permettant tout d'abord de synthétiser un correcteur auto-adaptatif, mais aussi d'analyser sa stabilité et ses performances, via des outils simples d'utilisation, et ceux aussi bien dans le régime transitoire que dans le régime permanent. Nous essaierons aussi d'appliquer la méthode obtenue sur des exemples issus de l'aérospatial.

1.4 La démarche

1.4.1 La situation

Pour traiter le problème décrit par la section 1.1 (page 13), on choisit de s'intéresser aux méthodes de commande adaptative indirecte. A l'aide des signaux d'entrée et de sortie du procédé, les paramètres d'un *modèle du procédé* sont *estimés*, et ces estimations sont utilisées pour réajuster en ligne le correcteur. La situation est représentée par la FIGURE 1.5, où le vecteur des paramètres (θ) est estimé ($\hat{\theta}$) à l'aide des mesures des entrées ($u \in \mathbb{R}^{m_u}$) et des sorties ($y \in \mathbb{R}^{r_y}$) du procédé ($H(s, \theta)$), puis transmis au correcteur ($K(s, \hat{\theta})$) ($d \in \mathbb{R}^{m_d}$ est une perturbation non mesurée, et $p \in \mathbb{R}^{r_p}$ est une sortie régulée).

Dans ce travail, on traite de la *commande adaptative indirecte* de procédés

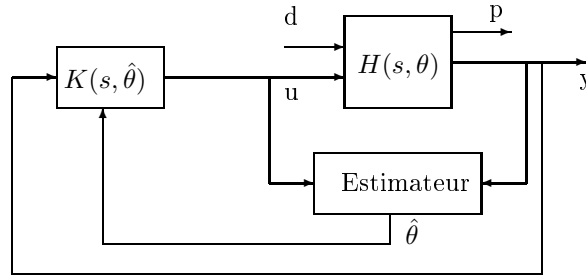


FIGURE 1.5 – Schéma global de la commande auto-adaptative indirecte. θ représente les paramètres du procédé, $\hat{\theta}$ une estimation de θ , $H(s, \theta)$ représente le procédé, et $K(s, \hat{\theta})$ représente le correcteur.

linéaires stationnaires, le vecteur des paramètres θ est donc constant.

1.4.2 Position du problème

On considère que θ est un vecteur de n paramètres incertains $\theta_1, \dots, \theta_n$. De plus, on suppose que l'on connaît des bornes sur chacun de ces paramètres incertains. C'est à dire que pour tout $i \in [1, n]$, on connaît $\theta_{i,min}$ et $\theta_{i,max}$ tels que $\theta_i \in [\theta_{i,min}, \theta_{i,max}]$. On peut alors noter $\theta_{i,0} = \frac{1}{2}(\theta_{i,min} + \theta_{i,max})$, la valeur nominale de θ_i , et définir $\theta_0 = (\theta_{1,0}, \dots, \theta_{n,0})$.

On peut écrire que $\theta_i = \theta_{i,0}(1 + \delta_{i,u})$, où $\delta_{i,u}$ constitue une *incertitude relative* sur la valeur du paramètre θ_i ($\delta_{i,u} = \frac{1}{\theta_{i,0}}(\theta_i - \theta_{i,0})$).

Afin de commander de manière adaptative le procédé $(H(s, \theta))$, on cherche à séquencer le correcteur en fonction des valeurs des paramètres mentionnés. On suppose que l'on dispose de la représentation d'état suivante du procédé.

$$(H(s, \theta)) \begin{cases} \dot{x} &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour réaliser une commande auto-adaptative indirecte, on est confronté à deux problèmes cruciaux. Le premier problème est que le temps de calcul pour réaliser le réajustement du correcteur ne doit pas être « prohibitif » pour une implantation en ligne. Le second est de garantir la stabilité et les performances souhaitées. En effet, les paramètres du procédé ne sont pas directement mesurés, mais estimés. Cette estimation introduit un écart ($\hat{\theta}(t) - \theta \neq 0$). Ce dernier est constitué d'une erreur propre au régime transitoire et d'une erreur d'estimation asymptotique. On cherchera donc d'une part à garantir, pendant le régime permanent, des performances entrée-sortie en dépit de l'erreur d'estimation asymptotique, et d'autre part à s'assurer que pendant le régime transitoire, le système est au moins stable et qu'il reste « raisonnablement proche » des performances souhaitées. Il faut donc que le correcteur soit robuste par rapport aux erreurs d'estimation de θ , et des autres erreurs de modélisation.

1.4.3 Une modélisation du schéma avec des LFTs

Pour résoudre ces problèmes, on propose d'utiliser la structure représentée par la FIGURE 1.6, où le procédé et le correcteur sont tous deux modélisés par des structures LFT. C'est à dire que l'on pose $H(s, \theta) = \mathcal{F}_u(H_{aug}(s), \Delta_h(\theta))$, et $K(s, \hat{\theta}) = \mathcal{F}_u(K_{aug}(s), \Delta_k(\hat{\theta}))$. La particularité de l'approche présentée réside dans le fait que l'estimateur ne fait pas partie des schémas de synthèse et d'analyse de la commande auto-adaptative.

La modélisation par LFT présente deux intérêts :

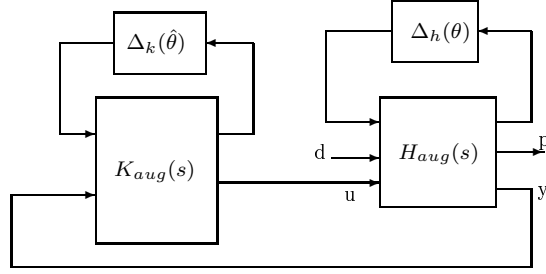


FIGURE 1.6 – Schéma de commande auto-adaptative dans le cas d’une modélisation par LFT. $K_{aug}(s)$ représente la partie du correcteur synthétisée hors ligne. $\Delta_h(\theta)$ et $\Delta_k(\hat{\theta})$ représentent les dépendances respectivement par rapport au paramètre θ et au paramètre estimé $\hat{\theta}$ modélisées sous forme LFT.

- Tout d’abord, grâce à cette structure du correcteur, on espère minimiser le temps de calcul pour son réajustement en ligne. En effet, dans ce cas, le calcul du correcteur $K(s, \hat{\theta}) = \mathcal{F}_u(K_{aug}(s), \Delta_k(\hat{\theta}))$ se fera en deux parties : K_{aug} sera déterminé hors-ligne, et il ne restera alors plus qu’à ajuster $\Delta_k(\hat{\theta})$ en ligne [56].
- De plus, cette structure permet de réaliser une analyse hors ligne des propriétés de stabilité et de performance de la boucle fermée auto-adaptative à l’aide d’outils d’analyse de la robustesse [30].

Dans cette structure, le correcteur auto-adaptatif est en fait un ensemble constitué d’un estimateur et d’un correcteur auto-séquenté. On propose donc des méthodes de synthèse et d’analyse robustes qui permettront d’assurer la robustesse du correcteur $K(s, \hat{\theta})$ par rapport aux erreurs d’estimation de θ , et des autres erreurs de modélisation.

1.4.4 Les étapes de la démarche

L’objet de cette thèse consiste à *développer une méthodologie de synthèse et d’analyse d’un correcteur pour un schéma de commande auto-adaptative*. Cette méthodologie associe la synthèse d’un correcteur auto-séquenté à une analyse hors-ligne de la stabilité et de la performance. En effet, on s’inspire des démarches présentées dans [60], où l’on synthétise un correcteur pour ensuite rechercher les conditions sur l’estimateur permettant de garantir la stabilité.

Pour synthétiser un correcteur $\mathcal{F}_u(K_{aug}, \Delta_k(\hat{\theta}))$, on présente une méthode en quatre étapes :

1. Mettre le procédé sous forme LFT
2. Synthétiser un correcteur LFT.
3. Etudier la stabilité et les performances du correcteur obtenu en fonction des erreurs d'estimation. Cette étape permet aussi d'établir les contraintes que doivent respecter l'estimateur pour garantir la stabilité et les performances souhaitées.
4. Synthétiser un estimateur respectant les contraintes précédemment obtenues.

1.4.5 Présentation des travaux

Pour présenter cette méthodologie, après cette première partie introductive, on fait un rappel des *méthodes et outils* (page 29) (chapitres 2, 3 et 4) qui seront utilisés dans cette thèse, pour ensuite exposer la *Démarche (de l'étude théorique)* (page 107) qui a été suivie. La méthodologie obtenue est ensuite mise en place sur une *Application* (page 121) issue de l'aérospatial. Enfin, une *Discussion et une Conclusion* (page 159) sur l'ensemble de la thèse est proposée.

Chapitre 2

Introduction à la robustesse

2.1 Quelques éléments sur la stabilité et les performances

Dans ce paragraphe nous ne chercherons nullement à être exhaustif. L'objet est simplement de réaliser un rappel très bref de quelques notions choisies, qui permettront d'éclaircir les notations utilisées dans cet ouvrage. Pour plus de détail, nous invitons le lecteur à consulter [90, 77] par exemple.

2.1.1 Espaces et normes

Normes de vecteurs et de matrices

Dans l'espace vectoriel \mathbb{C}^m , pour tout $x \in \mathbb{C}^m$, on note $x = [x_1, \dots, x_m]^T$. Pour tout $q \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on notera $\|\cdot\|_q$ la norme définie par :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_q : \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \begin{cases} (\sum_{i=1}^m |x_i|^q)^{\frac{1}{q}} & \text{si } q \in \mathbb{N}^* \\ \max_{i \in [1, m]} |x_i| & \text{si } q = +\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{m \times n}$, $\|\cdot\|_q$ est définie telle que pour tout $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, on a :

$$\|A\|_q = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_q=1} \|Ax\|_q = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_q \leq 1} \|Ax\|_q = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_q \neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_q} \quad (2.2)$$

Cette norme est dite « norme induite ». En notant $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, on obtient les quelques résultats suivants :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.3)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (2.4)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda(A^*A)} \quad (2.5)$$

Normes de signaux

Pour les signaux, on se restreindra aux signaux de valeur nulle pour les instants négatifs. Soit E l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^m , localement intégrables (intégrables au sens de Lebesgue), et nulles pour les valeurs (strictement) négatives. Pour tout $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on note $\|\cdot\|_q$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_q : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_q^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{si } q \in \mathbb{N}^* \\ \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \|f(t)\|_\infty, & \text{si } q = \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec

$$\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \|f(t)\|_\infty = \inf \{a \in \mathbb{R} \mid \mu[\{t \mid \|f(t)\|_\infty > a\}] = 0\} \quad (2.7)$$

où $\mu(A)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble A .

Définition 1 Soit E l'espace des fonctions définies de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^n , localement intégrables. Pour tout $q \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on note l_q l'espace des fonctions définies par :

$$l_q = \{f \in E \mid \|f\|_q < +\infty\} \quad (2.8)$$

Une généralisation particulière de la norme $\|\cdot\|_2$ pour les fonctions à valeur matricielle. Il est à noter que c'est cette généralisation que nous utiliserons par la suite. Soit E l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans $\mathbb{C}^{m \times n}$, localement intégrables (intégrables au sens de Lebesgue), et nulles pour les valeurs (strictement) négatives. On note $\|\cdot\|_2$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \left(\int_0^{+\infty} \text{Trace}(f(t)^* f(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Définition 2 Soit E l'espace des fonctions définies de \mathbb{R} dans $\mathbb{C}^{m \times n}$, localement intégrables (intégrables au sens de Lebesgue), et nulles pour les valeurs (strictement) négatives. On note \mathcal{L}_2 l'espace des fonctions définies par :

$$\mathcal{L}_2 = \{f \in E \mid \|f\|_2 < +\infty\} \quad (2.10)$$

On note alors que lorsque $n = 1$, on a $l_2 = \mathcal{L}_2$.

Les espaces de Hardy (\mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞) Soit E l'ensemble des applications de \mathbb{C} dans $\mathbb{C}^{m \times n}$.

Définition 3 (définition de \mathcal{H}_2) \mathcal{H}_2 est l'ensemble des fonctions $F \in E$ qui sont analytiques dans le demi-plan droit de \mathbb{C} ($\text{Re}(s) > 0$), telles que

$$\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace} [F^*(j\omega)F(j\omega)] d\omega} < \infty \quad (2.11)$$

Cette dernière quantité définit une norme sur \mathcal{H}_2 que l'on nommera par la suite la norme H_2 .

Définition 4 (définition de \mathcal{H}_∞) \mathcal{H}_∞ est l'ensemble des fonctions $F \in E$ qui sont analytiques et bornées dans le demi-plan droit de \mathbb{C} ($\text{Re}(s) > 0$), telles que

$$\|F\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma} [F(s)] = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma} [F(j\omega)] < \infty \quad (2.12)$$

Cette dernière quantité définit une norme sur \mathcal{H}_∞ que l'on nommera par la suite la norme H_∞ .

Proposition 1 – Soit $g \in \mathcal{L}_2$, et G sa transformée de Laplace. On a alors que $G \in \mathcal{H}_2$.

– Et inversement, si $F \in \mathcal{H}_2$, et que f est sa transformée inverse de Laplace, alors $f \in \mathcal{L}_2$.

Théorème 1 (Théorème de Parseval) Soit $u \in l_2$, et U sa transformée de Laplace ($U \in \mathcal{H}_2$ selon proposition précédente). On a alors :

$$\|u\|_2 = \|U\|_2 \quad (2.13)$$

Normes de systèmes

Définition 5 (Opérateur de troncature) Soit $T \in \mathbb{R}$, et $E \subset \mathcal{L}_2$. On définit

$$\begin{aligned} P_T : E &\longrightarrow E \\ x &\mapsto P_T(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

comme étant un opérateur de troncature, avec pour tout $x \in E$,

$$P_T(x)(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } t \in [0, T] \\ 0 & \text{pour } t \in]T, +\infty[\end{cases} \quad (2.15)$$

Soit $E_m \subset \mathcal{L}_2$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m , et soit E_n l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n . On suppose que les applications de E_m sont nulles pour des variables négatives. Soit E_{Sys} l'ensemble des systèmes à m entrées et n sorties. Pour tout $\mathcal{S} \in E_{Sys}$, si $u \in E_m$ est une entrée, on note $\mathcal{S}[u] \in E_n$ sa sortie (lorsqu'elle existe).

Définition 6 (Système causal) ([74]) Un système (\mathcal{S}) est dit causal si

$$\forall T \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E_m, \quad P_T(\mathcal{S}(u)) = P_T(\mathcal{S}[P_T(u)]) \quad (2.16)$$

Lorsqu'elles existent, on définit sur (\mathcal{S}) les normes suivantes ([74]).

Gain L_2

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\|_2 &= \sup \left\{ \frac{\|P_T(\mathcal{S}[u])\|_2}{\|P_T(u)\|_2} \mid u \in E_m, T \geq 0, \|P_T(u)\|_2 \neq 0 \right\} \\ &= \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \forall u \in E_m, T \geq 0, \\ &\quad \|P_T(\mathcal{S}[u])\|_2 \leq \gamma \|P_T(u)\|_2 \} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Gain incrémental L_2

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\|_{2i} &= \sup \left\{ \frac{\|P_T(\mathcal{S}[u_1]) - P_T(\mathcal{S}[u_2])\|_2}{\|P_T(u_1) - P_T(u_2)\|_2} \mid \right. \\ &\quad \left. u_1, u_2 \in E_m, T \geq 0, \|P_T(u_1) - P_T(u_2)\|_2 \neq 0 \right\} \\ &= \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \forall u_1, u_2 \in E_m, T \geq 0, \\ &\quad \|P_T(\mathcal{S}[u_1]) - P_T(\mathcal{S}[u_2])\|_2 \leq \gamma \|P_T(u_1) - P_T(u_2)\|_2 \} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Norme lipschitzienne (Constante de Lipschitz) On dit que l'application \mathcal{S} est lipschitzienne s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout u_1 et u_2 dans E_m , on a :

$$\forall u_1, u_2 \in E_m, \quad \|\mathcal{S}[u_1] - \mathcal{S}[u_2]\|_2 \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_2 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\|_{lip,2} &= \sup \left\{ \frac{\|\mathcal{S}[u_1] - \mathcal{S}[u_2]\|_2}{\|u_1 - u_2\|_2} \mid \right. \\ &\quad \left. u_1, u_2 \in E_m, T \geq 0, \|u_1 - u_2\|_2 \neq 0 \right\} \\ &= \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \forall u_1, u_2 \in E_m, T \geq 0, \\ &\quad \|\mathcal{S}[u_1] - \mathcal{S}[u_2]\|_2 \leq \gamma \|u_1 - u_2\|_2 \} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si \mathcal{S} est causal, on a

$$\|\mathcal{S}\|_{lip,2} = \|\mathcal{S}\|_{2i} \quad (2.21)$$

Norme induite L_2 Pour les systèmes linéaires continus stables (donc lipschitziens) et causaux, on peut définir une norme que l'on appelle parfois norme L_2 induite, et pour laquelle, on a :

$$\|\mathcal{S}\|_{iL_2} = \|\mathcal{S}\|_{lip,2} = \|\mathcal{S}\|_{2i} = \|\mathcal{S}\|_2 \quad (2.22)$$

Cas particulier des systèmes LTI Dans ce cas particulier, l'entrée et la sortie du système sont liées par une relation de produit de convolution. En effet, considérons \mathcal{S}_h un système LTI à m entrées et n sorties. Soit h l'application de \mathbb{R} dans $\mathbb{R}^{n \times m}$, telle que la j -ième colonne de h représente la réponse de \mathcal{S}_h lorsque la j -ième entrée est une impulsion, et toutes les autres entrées sont nulles. On a alors que si u est une entrée et y la sortie associée, pour tout t , $y(t) = (h * u)(t)$. De manière un peu plus formelle, en notant E_m l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m , pour toute application h de \mathbb{R} dans $\mathbb{R}^{n \times m}$, on définit $\mathcal{T}(h)$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(h) : E_n &\rightarrow E_m \\ u &\mapsto \mathcal{T}(h)[u] : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

Soit h est une fonction de \mathbb{R} dans $\mathbb{R}^{n \times m}$ telle que $h(t) = 0$ pour tout $t < 0$. Soit H la transformée de Laplace de h . On peut alors montrer, (lorsque les deux quantités existent) que :

$$\|\mathcal{T}(h)\|_2 = \|H\|_\infty \quad (2.24)$$

2.1.2 La stabilité

Considérons l'évolution d'un système décrit par une équation différentielle (ou une équation aux différences dans le cas d'un système discret). On peut alors distinguer différentes notions de stabilité : la stabilité interne et la stabilité BIBO (*angl.* Bounded Input, Bounded Output : Entrée Bornée, Sortie Bornée).

Considérons que l'on dispose de la modélisation d'un système par une équation différentielle. Dans le cadre de cette thèse, on ne s'intéressera qu'à la stabilité interne, et la stabilité entrée-sortie. En effet, on cherche à garantir que quelles que soient les consignes et les perturbations bornées auxquelles sera soumis l'ensemble commandé, tous les signaux (internes et externes) seront eux aussi bornés.

Définition 7 (l_q -stabilité) Soit $q \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit un système dynamique tel que si l'entrée de ce dernier est $u \in E_m$, alors on note $\mathcal{S}[u] \in E_n$ sa sortie. Ce système dynamique est dit l_q -stable si :

- $\forall u \in l_q$ alors $\mathcal{S}[u] \in l_q$;
- $\exists \gamma < +\infty$ tel que $\forall u \in l_q$, $\|\mathcal{S}[u]\|_q \leq \gamma \|u\|_q$

Souvent, on parle de stabilité BIBO pour parler de l_2 -stabilité ou de l_∞ -stabilité. Il est à noter que dans le cas d'une l_q -stabilité, avec $q \in \mathbb{N}$, on peut parfaitement avoir une entrée $u \in l_q$ et à support borné, et une sortie $\mathcal{S}[u]$ telle que $\forall a \in \mathbb{R}_+$, il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in I$, $|\mathcal{S}[u](t)| \geq a$.

Pour toute la suite on supposera que le système est causal, et que pour une entrée u , il existe une unique sortie $\mathcal{S}[u]$. Considérons le système dont l'évolution de l'état est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.25)$$

Définition 8 (Stabilité) L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système (2.25) est stable si $\forall \epsilon > 0$ et $\forall t_0 \geq 0$, $\exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon, t_0) \Rightarrow \forall t \geq t_0, \|x(t; x_0, t_0)\| < \epsilon \quad (2.26)$$

Dans le cas contraire, l'état d'équilibre est dit instable.

Définition 9 (Bornée) Une solution $x(t; x_0, t_0)$ du système (2.25) est bornée s'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall t \geq t_0$, $\|x(t; x_0, t_0)\| < \beta$; où β peut être fonction de la solution, c'est à dire de x_0 et t_0 .

2.1.3 Les performances

Les critères de performance d'un asservissement sont nombreux en Automatique. Les critères les plus intuitifs sont probablement ceux associés aux réponses temporelles. En effet, en dehors de la stabilité BIBO qui peut être vue comme un critère temporel, souvent on observe les réponses impulsionnelles ou indicielles (lorsqu'il est possible de s'en approcher). Ainsi, sur une réponse indicielle par exemple, la commande peut alors être caractérisée par le temps de réponse, les dépassements, l'erreur sur la valeur de consigne, l'erreur de traînage, la pseudo-période d'oscillation, ... D'un autre côté, on peut aussi utiliser des critères fréquentiels tels que la marge de gain, la marge de phase, la fréquence de coupure, ... Mais on peut aussi caractériser ces réponses par des critères un peu plus abstraits, tels que les critères H_∞ , H_2 , L_2 , la position des pôles, ... En fonction des objectifs de synthèse ou d'analyse, on sera amené à utiliser des outils développés à cet effet.

Pour les critères dits H_∞ , H_2 et L_2 , qui seront les plus utilisés par la suite, il s'agit de caractériser les transferts à l'aide des normes décrites dans la partie 2.1.1. Par exemple, bien souvent, en Automatique, on peut se ramener au schéma dit de « la forme standard » représenté par la FIGURE 2.1. En

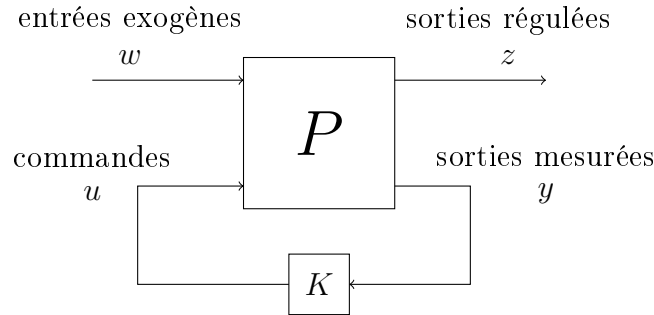


FIGURE 2.1 – Schéma de la forme standard

considérant ce schéma, pour une fonction de transfert P donnée, la synthèse H_∞ consiste à résoudre le problème suivant :

$$\text{Trouver } K_{opt} \text{ tel que } \min_{K \in \mathcal{E}} \|T_{w \rightarrow z}(K)\|_\infty = \|T_{w \rightarrow z}(K_{opt})\|_\infty \quad (2.27)$$

où \mathcal{E} représente l'ensemble des correcteurs stabilisants, et $T_{w \rightarrow z}(K)$ le transfert linéaire stationnaire entre w et z . Le problème de synthèse H_2 est identique à celui de la synthèse H_∞ , il suffit de remplacer la norme $\|\cdot\|_\infty$ par la norme $\|\cdot\|_2$.

Dans un cadre légèrement différent, le problème de synthèse L_2 , traite du

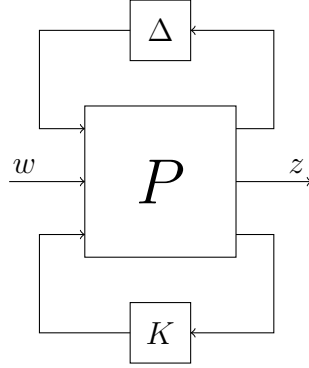


FIGURE 2.2 – Schéma pour l’analyse d’une marge de stabilité L_{2r} .

cas de la FIGURE 2.2. Lorsque Δ n’est pas stationnaire, on ne peut plus traiter la norme infinie du transfert, on considère donc la norme induite $\|\cdot\|_{iL_2}$. Ainsi, dans le cadre d’une analyse, K étant une fonction de transfert LTI fixée, on peut par exemple chercher à calculer :

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{B}} \|T_{w \rightarrow z}(K)\|_{iL_2} \quad (2.28)$$

où \mathcal{B} est l’ensemble des fonctions de transfert linéaires que l’on considère.

D’autres critères

En outre, on peut aussi prendre en compte, lorsque le correcteur est embarqué la « taille » de celui-ci, qui caractérisera l’espace mémoire qui lui sera dédié lors de son implantation.

Il apparaît aussi un critère supplémentaire qui est celui du « temps de calcul ». En effet, il faut aussi s’assurer que la mise en œuvre du correcteur ne conduira pas à une instabilité. Car si la stabilité de l’ensemble du schéma adaptatif dépend du temps écoulé entre les informations reçues par le correcteur (discret) obtenu après implantation, et sa commande de sortie, ce temps est d’autant plus long que le temps de calcul est grand. De plus, dans le temps de calcul d’un correcteur auto-adaptatif indirect, il faut aussi prendre en compte le temps de calcul de l’estimateur. De ce point de vue, puisqu’un correcteur adaptatif direct ne possède pas d’estimateur, on pourrait conclure qu’un correcteur auto-adaptatif direct est plus rapide. Mais dans ce cas, l’étude du régime transitoire semble a priori plus délicate.

2.2 Quelques éléments sur les Transformations Linéaires Fractionnaires

En Automatique, les schémas comme celui représenté par la FIGURE 2.1 sont si fréquemment rencontrés que des outils spécifiques ont été conçus pour leur traitement. En particulier le formalisme des transformations linéaires fractionnaires constitue un élément important de ces outils.

2.2.1 Définitions

Soit le quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, avec $d \neq 0$. On appelle *transformation linéaire fractionnaire* associée au quadruplet (a, b, c, d) , l'application F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}/\{-\frac{c}{d}\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{a+bz}{c+dz} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Par extension, pour un quadruplet de matrices complexes $(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}) \in \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n_u} \times \mathbb{C}^{n_y \times n} \times \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$, en notant $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$, on définit la *Transformation Linéaire Fractionnaire* (angl. *Linear Fractional Transformation*) (*LFT*) *haute* par l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(P, \cdot) : \mathcal{E}_u &\rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u} \\ \Delta &\mapsto P_{22} + P_{21}\Delta(I_n - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec $\mathcal{E}_u = \mathbb{C}^{n \times n} / \{\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n} | \det(I_n - P_{11}\Delta) = 0\}$. De plus, puisqu'au schéma de la FIGURE 2.3(a) est associé le système d'équations

$$\begin{cases} w &= P_{11}v + P_{12}u \\ y &= P_{21}v + P_{22}u \\ v &= \Delta w \end{cases} \quad (2.31)$$

on trouve que pour tout $\Delta \in \mathcal{E}_u$, $y = \mathcal{F}_u(P, \Delta)u$. Le schéma de la FIGURE 2.3(a) est donc dit *représentation LFT haute*. De manière analogue, on définit la *LFT basse* par le schéma de la FIGURE 2.3(b) et l'expression générique :

$$\mathcal{F}_l(P, \Delta) = P_{11} + P_{12}\Delta(I - P_{22}\Delta)^{-1}P_{21} \quad (2.32)$$

(pour des matrices définies de manière adéquate).

De la même manière, le schéma de la FIGURE 2.3(c) est appelé représentation LFT, bien qu'il ne comporte aucune entrée ni sortie, car il pourrait être vu comme un cas particulier lorsque $M = P_{11}$, les autres sous-matrices de P étant des matrices vides (matrices dont l'une des dimensions est nulle).

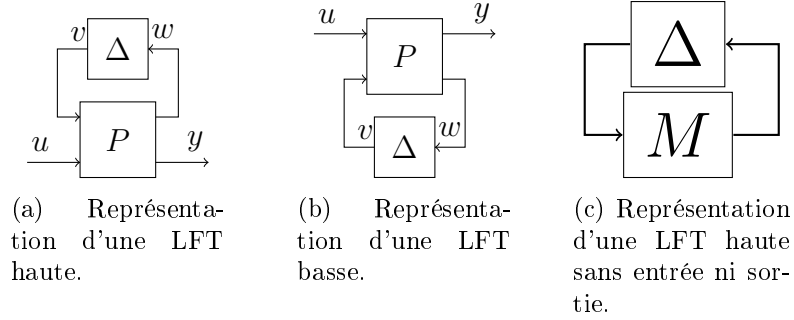


FIGURE 2.3 – Représentations des LFT.

Pour passer d'une LFT basse $\mathcal{F}_l(Q, \Delta)$ à une LFT haute $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$, il suffit de réaliser les transformations suivantes : $P_{11} \leftarrow Q_{22}$, $P_{22} \leftarrow Q_{11}$, $P_{12} \leftarrow Q_{21}$ et $P_{21} \leftarrow Q_{12}$. Par conséquent, on constate qu'il y a une certaine équivalence entre les LFTs hautes et basses, et que l'utilisation d'une seule de ces deux transformations suffit. On choisit donc arbitrairement d'utiliser préférentiellement la LFT haute.

Définition 10 Soit $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. La LFT haute $\mathcal{F}_u(P, \cdot)$ (resp. basse $\mathcal{F}_l(P, \cdot)$) est dite « bien-définie » ou « bien-posée » sur l'ensemble \mathcal{E} , si $\forall \Delta \in \mathcal{E}$, $\det(I - P_{11}\Delta) \neq 0$ (resp. $\det(I - P_{22}\Delta) \neq 0$).

La LFT comme opérateur

Une des particularités des LFTs réside dans le fait que « la LFT de deux LFTs est une LFT » (pour peu que les éléments soient convenablement définis). Plus rigoureusement, cela signifie que, par exemple, en notant $L = \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_u(P_1, \Delta_1), \mathcal{F}_u(P_1, \Delta_1))$, il existe d'une part P_3 fonction uniquement de P_1 et P_2 et d'autre part Δ_3 fonction uniquement de Δ_1 et Δ_2 tels que $L = \mathcal{F}_u(P_3, \Delta_3)$. En ce sens, la mise sous forme LFT dispose donc d'une propriété de « stabilité ». On définit alors l'opérateur \otimes par :

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta) = M \otimes \Delta \quad (2.33)$$

Les propriétés opératoires sur les LFT sont exposées dans l'Annexe A. On peut aussi généraliser l'opérateur LFT par le produit de Redheffer défini de la manière suivante.

Définition 11 (Produit de Redheffer) Soient

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \text{ et } N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

deux matrices complexes telles que les opérations qui suivent sont bien définies. On définit le produit de Redheffer, noté \star , par l'égalité suivante :

$$M \star N = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_l(M, N_{11}) & M_{12}(I - N_{11}M_{22})^{-1}N_{12} \\ N_{21}(I - M_{22}N_{11})^{-1}M_{21} & \mathcal{F}_u(N, M_{22}) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

On constate que le produit de Redheffer est une généralisation de la LFT dans le sens où lorsque les matrices M_{11} , M_{12} et M_{21} sont des matrices vides (c'est à dire au moins une dimension nulle et l'autre étant appropriée), on retrouve $\mathcal{F}_u(N, M_{22})$.

2.2.2 Minimalité

Définition 12 (Equivalence) Soient $\mathcal{F}_u(M, \cdot) : \mathcal{E}_M \subset \mathbb{C}^{n_1 \times n_1} \rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ et $\mathcal{F}_u(N, \cdot) : \mathcal{E}_N \subset \mathbb{C}^{n_2 \times n_2} \rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ deux LFTs ayant des nombres d'entrée et de sortie non nuls. Ces LFTs sont dites équivalentes, si la différence de ces LFTs est nulle pour toutes les incertitudes considérées.

Définition 13 (Minimalité) Une représentation LFT est dite minimale lorsque la dimension de Δ est la plus petite parmi toutes les représentations équivalentes. (Il n'y a a priori pas unicité d'une représentation LFT.)

2.2.3 Modélisation des incertitudes par LFT

De nombreuses incertitudes (structurées ou pas) peuvent être représentées sous forme LFT.

Incertitudes paramétriques

Considérons l'exemple du système incertain suivant :

$$S_{inc} = \left[\begin{array}{c|c} A_{inc} & B_{inc} \\ \hline C_{inc} & D_{inc} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{4} + \alpha & 1 + \beta & 1 & 0 \\ -1 + \beta & -\frac{1}{4} + \gamma & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.36)$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $|\alpha| < \frac{3}{2}$, $|\beta| < \frac{3}{2}$, $|\gamma| < \frac{3}{2}$. Soit $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. En posant

$$B_l = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \quad C_l = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad P = \left[\begin{array}{c|cc} A_0 & B_l & B_{inc} \\ \hline C_l & 0 & 0 \\ C_{inc} & 0 & D_{inc} \end{array} \right] \quad (2.38)$$

Alors $S_{inc} = P \otimes \Delta$.

Incertitudes dynamiques

On retrouve les incertitudes dynamiques dans diverses situations :

- Pour modéliser des erreurs de modèle. En effet, certains modèles dynamiques sont réalisés dans un certain domaine de fréquence et ne constitue qu'une approximation du véritable modèle. Toutefois, on peut être en mesure de proposer une borne sur l'erreur de modèle. Cette erreur de modèle peut alors être représentée par une famille (bornées) de modèles dynamiques.
- De manière similaire, le modèle dynamique peut être parfaitement connu, mais afin de simplifier les calculs, on utilise une expression approchée adéquate au domaine de fréquence sur lequel on travaille. Il est alors possible de proposer une borne aux incertitudes dynamiques, valable dans le domaine de fréquence où l'on travaille. Par exemple, pour prendre en compte un retard sur la réponse d'un système il est souvent utilisé une approximation de Padé de la fonction de transfert $s \mapsto e^{-\tau s}$. On peut alors écrire (pour les basses fréquence) par exemple :

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} + \Delta(s) \quad (2.39)$$

où $\Delta(s)$ est une incertitude dynamique bornée sur des intervalles de fréquences proches de 0.

Bloc complexe plein La modélisation d'incertitudes est réalisée dans différents cas.

- Le cas le plus naturel correspond à la « modélisation de dynamiques négligées ». Par exemple, pour un avion, les dynamiques négligées peuvent correspondre à des modes flexibles. Il y a différentes manières de représenter ces incertitudes, par exemple par « addition directe », comme sur la FIGURE 2.4 ou par multiplication en retour de sortie, comme sur la FIGURE 2.6.
- La μ -analyse a été introduite pour analyser la robustesse de la stabilité. Des blocs artificiels dynamiques sont souvent considérés afin d'étendre les potentialités naturelles de la μ -analyse à l'« analyse des performance » (voir paragraphe 2.3 page 42).

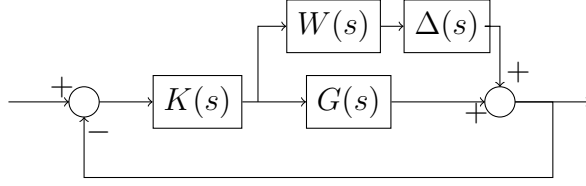


FIGURE 2.4 – Exemple de dynamique négligée additive.

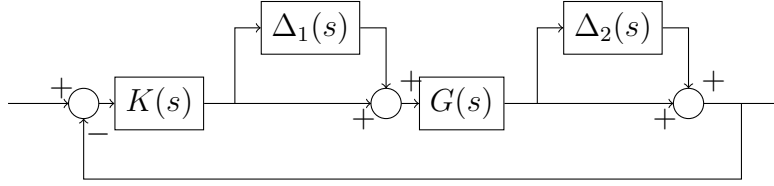


FIGURE 2.5 – Exemple de dynamique négligée multiplicatives en entrée et en sortie.

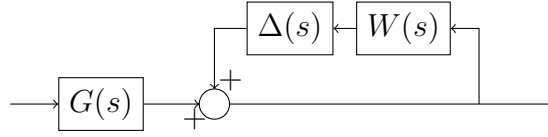


FIGURE 2.6 – Exemple de dynamique négligée représentée par une « multiplication en retour de sortie ».

Incertitudes scalaires complexes Les incertitudes scalaires dynamiques constituent un cas particulier des blocs complexes pleins. De telles incertitudes sont souvent introduites pour l'adaptation de la μ -analyse à l'analyse de performances. Par exemple, on peut définir une aire d'exclusion ellipsoïdale dans le plan de Nichols de la manière suivante :

$$\frac{1 + \beta(\delta_1 + \delta_2) + \alpha\delta_1\delta_2}{1 - \beta(\delta_1 + \delta_2) + \alpha\delta_1\delta_2} \text{ tel que } |\delta_1| < 1 \text{ et } |\delta_2| < 1 \quad (2.40)$$

où δ_1 et δ_2 sont des scalaires complexes. Dans cette formule, le transfert doit être placé en série avec la boucle ouverte du système pour lequel la performance est analysée (voir [32] pour plus de détails).

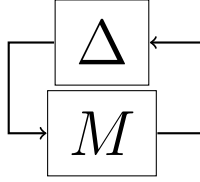


FIGURE 2.7 – Interconnexion sous forme LFT

2.3 Quelques éléments sur la μ -analyse

Comme on l'a vu précédemment, bien souvent on peut représenter beaucoup d'« incertitudes » sous forme LFT. Mais maintenant que l'on a vu comment les représenter, on s'intéressera dans ce chapitre à définir un outil permettant d'analyser la stabilité et les performances de schémas sous forme LFT, à savoir la μ -analyse.

D'une manière générale, on s'intéresse à la stabilité de l'interconnexion représentée par la FIGURE 2.7, où M et Δ sont deux opérateurs de l_2 dans l_2 , tels que M soit un opérateur donné, et Δ soit a priori inconnu, mais appartenant à un ensemble donné d'opérateurs, noté $\underline{\Delta}$.

Le principe adopté en Automatique, consiste à définir un nombre réel positif que l'on peut noter $R_{\underline{\Delta}}(M)$, qui serait le plus grand rayon de boule ouverte centrée en zéro (dans $\underline{\Delta}$) dans laquelle l'interconnexion de la FIGURE 2.7 est stable pour tous les opérateurs Δ de cette boule. On définit alors :

$$\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(M) = \frac{1}{R_{\underline{\Delta}}(M)} \quad (2.41)$$

avec pour convention $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(M) = 0$ lorsque « $R_{\underline{\Delta}}(M) = \infty$ ». Par la suite, dans tout ce chapitre, on considérera que M est un opérateur linéaire stationnaire (LTI). De plus, lorsque Δ est un opérateur linéaire stationnaire, on pourra définir une quantité notée μ pour laquelle on aura :

$$\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(M) = \sup_{\omega \in [0, \infty[} \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \quad (2.42)$$

Ainsi, on étudiera alors $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$, en fonction de l'ensemble $\underline{\Delta}$ considéré. Dans une première partie, on s'intéressera au cas où $\underline{\Delta}$ représente l'ensemble des opérateurs linéaires de l_2 dans l_2 . Mais, afin de prendre en compte des « structures » particulières des incertitudes fréquemment rencontrées, on s'intéressera successivement au cas où $\underline{\Delta}$ regroupe un ensemble d'opérateurs Δ structurés, tout d'abord constants, puis stationnaires, et enfin variants dans le temps.

2.3.1 Cas où Δ n'est pas structuré

A la connaissance de l'auteur, il n'y a pas de théorème général permettant de simplifier la définition de $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(M)$ lorsque $\underline{\Delta}$ regroupe l'ensemble des opérateurs linéaires de l_2 dans l_2 . A défaut, on s'intéressera donc au cas où $\underline{\Delta}$ regroupe des opérateurs linéaires lipschitziens. Pour traiter ce cas, on peut utiliser le « théorème des petits gains ». Dans sa première forme, il peut être énoncé comme suit ([1]) :

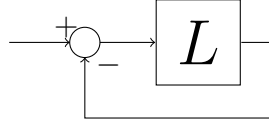


FIGURE 2.8 – 1^{ère} version du théorème des petits gains

Théorème 2 (Théorème des petits gains, (1^{ère} version)) *Considérons la boucle d'asservissement de la FIGURE 2.8, où L est un système BIBO stable quelconque (opérateur l_2 dans l_2). Une condition suffisante pour la stabilité interne de cette boucle est que L soit une contraction, c'est à dire que :*

$$\forall u, v \in l_2, \|L(u) - L(v)\|_2 \leq \alpha \|u - v\|_2 \quad (2.43)$$

avec $0 \leq \alpha < 1$ (ici $\|\cdot\|_2$ dénote la norme naturelle des signaux l_2). Si L est LTI, cette condition se réduit à $\|L\|_\infty < 1$.

Dans notre cas, on sera surtout intéressé par la version suivante (qui n'est qu'un cas particulier du théorème précédent) :

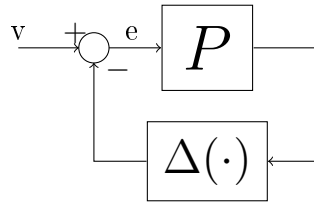


FIGURE 2.9 – 2^{ème} version du théorème des petits gains

Théorème 3 (Théorème des petits gains, (2^{ème} version)) *Considérons la boucle d'asservissement de la FIGURE 2.9 où le système nominal $P(s)$ est*

un système linéaire stationnaire stable et l'incertitude non structurée $\Delta(\cdot)$ est un opérateur de l_2 vérifiant :

$$\forall u, v \in l_2, \|\Delta(u) - \Delta(v)\|_2 \leq \alpha \|u - v\|_2 \quad (2.44)$$

(Δ est α -lipschitzien) avec $0 \leq \alpha < 1$. Cette boucle est stable de façon interne pour tout Δ satisfaisant (2.44) si et seulement si $\|P\|_\infty < 1$, et ce résultat reste valable lorsque l'incertitude Δ est restreinte à l'espace des systèmes linéaires stationnaires stables $\Delta(s)$ de norme $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$.

Ce théorème permet donc de formuler le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Considérons la boucle d'asservissement de la FIGURE 2.9 où le système nominal $P(s)$ est un système linéaire stationnaire stable non nul. Alors la boucle est stable de façon interne pour toutes les incertitudes non structurées $\Delta(\cdot)$ qui sont des opérateurs linéaires de l_2 vérifiant :*

$$\forall u, v \in l_2, \|\Delta(u) - \Delta(v)\|_2 \leq \alpha \|u - v\|_2 \quad (2.45)$$

avec $0 \leq \alpha < \frac{1}{\|P\|_\infty}$. Ce résultat reste valable lorsque l'incertitude Δ est restreinte à l'espace des systèmes linéaires stationnaires stables $\Delta(s)$ de norme $\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\|P\|_\infty}$.

Lorsque $\underline{\Delta}$ regroupe l'ensemble des opérateurs linéaires lipschitziens (donc continus) de l_2 dans l_2 , la constante de lipschitz (l'inf des α respectant (2.45) pour $u \neq v$) y constitue une norme sur $\underline{\Delta}$ (la norme L_2 induite), et on déduit que $R_{\underline{\Delta}}(P) \geq (\|P\|_\infty)^{(-1)}$. Cependant, on montre aussi que $R_{\underline{\Delta}}(P) \leq (\|P\|_\infty)^{(-1)}$. En effet, dans le cas particulier où P et Δ sont des systèmes linéaires stationnaires, on peut réaliser des transformations de Laplace, et à partir de la FIGURE 2.9 on peut alors écrire : $(I + \Delta(s)P(s))e = v$. De cette expression, on en déduit que la boucle fermée est stable si on a : $\forall \omega \in [0, \infty[, \det(I + \Delta(s)P(s)) \neq 0$. Soit donc ω_m une pulsation pour laquelle on a $\overline{\sigma}(P(j\omega_m)) = \|P\|_\infty$. Il existe alors des matrices U, V et Σ telles que $U^*U = I, V^*V = I, \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, et $P(j\omega_m) = U\Sigma V^*$. En posant $\Delta_m = \frac{1}{\|P\|_\infty} VU^*$, on obtient

$$\det(I - \Delta_m P(j\omega_m)) = \det\left(VV^* - \left(\frac{1}{\|P\|_\infty} VU^*\right)(U\Sigma V^*)\right) \quad (2.46)$$

$$= \det(V)\det\left(I - \frac{1}{\|P\|_\infty}\Sigma\right)\det(V^*) \quad (2.47)$$

$$= \det(V) \cdot 0 \cdot \det(V^*) = 0 \quad (2.48)$$

Δ_m est donc une matrice telle que $\bar{\sigma}(\Delta_m) = \frac{1}{\|P\|_\infty}$, et pour laquelle la boucle fermée est instable lorsque $\Delta(s) = \Delta_m$. On en déduit donc que

$$R_{\underline{\Delta}}(P) = \frac{1}{\|P\|_\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(P) = \|P\|_\infty \quad (2.49)$$

Il est à noter que cette borne est obtenue en faisant uniquement l'hypothèse que les opérateurs Δ sont linéaires et continus (donc lipschitziens), et pas nécessairement stationnaires.

De plus, bien que l'on n'ait pas encore défini μ , on peut déjà remarquer que si on veut que la définition que l'on proposera soit cohérente avec ce qui a été écrit jusqu'à maintenant, il faudra avoir : $\sup_{\omega \in [0, \infty[} \mu_{\underline{\Delta}}(P(j\omega)) = \|P\|_\infty$

Dans le théorème des petits gains, on considère que l'incertitude est non structurée. C'est-à-dire que la matrice Δ peut prendre toutes les valeurs telles que $\|\Delta\|_{iL_2} < \frac{1}{\|P\|_\infty}$. Cependant, en pratique, on est souvent confronté à des formes particulières de perturbation. En effet, le transfert linéaire Δ peut être « structuré ». Bien souvent, on entend par là que l'on impose que le transfert linéaire Δ soit « bloc diagonal ». Ainsi, dans le cas où Δ est structurée, la condition de stabilité est conservative. C'est à dire que l'on ne peut plus affirmer l'égalité, mais uniquement que $R_{\underline{\Delta}}(P) \geq \frac{1}{\|P\|_\infty}$, et la borne supérieure sur $\|\Delta\|_{iL_2}$ est trop importante. C'est la raison pour laquelle on cherche à réduire le conservatisme sur la borne de $\|\Delta\|_{iL_2}$.

2.3.2 Cas où Δ est structuré et constant, et M est constant

Là encore, on s'intéresse à la « stabilité » des boucles fermées représentées sur les FIGURES 2.10(a) et 2.10(b). L'étude de la stabilité de ces deux schémas est équivalente en posant $M = P_{11}$. Mais contrairement à précédemment, ici on s'intéresse uniquement au cas où les matrices P , M et Δ sont constantes (pouvant prendre leurs valeurs dans \mathbb{C}), et on supposera de plus que les matrices Δ considérées sont « structurées ». Dans ce contexte, on cherchera donc à exprimer $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(M)$, lorsque $\underline{\Delta}$ regroupe les matrices Δ constantes. Pour cela, on définit la valeur singulière structurée.

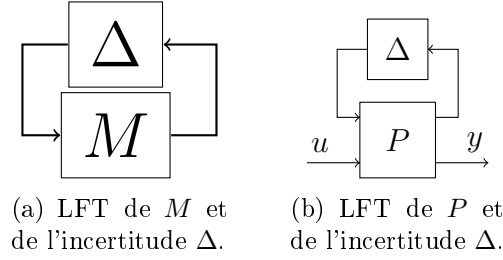


FIGURE 2.10 – Schémas de la μ -analyse

Définition de μ pour M et Δ constants

Soient m_r , m_c et m_C d'une part, et $k_1, \dots, k_{(m_r+m_c+m_C)}$ d'autre part, des entiers naturels. On définit l'ensemble $\underline{\Delta}$ par :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta} = \{ & \Delta = \text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c}}, \\ & \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) \text{ avec } \forall i \in [1, m_r], \delta_i^r \in \mathbb{R}; \quad \forall j \in [1, m_c], \delta_j^c \in \mathbb{C}, \\ & \forall q \in [1, m_C], \Delta_q^C \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+q} \times k_{m_r+m_c+q}} \} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$\underline{\Delta}$ définit donc un ensemble de matrices « structurées » diagonales par bloc pour lesquelles m_r , m_c et m_C désignent respectivement le cardinal des nombres réels (éventuellement répétés) sur la diagonale, le cardinal des nombres complexes (éventuellement répétés) sur la diagonale, et le cardinal des matrices complexes (éventuellement répétés) sur la diagonale.

Notons

$$\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta} = \{\Delta \in \underline{\Delta} | \overline{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad (2.51)$$

$$\underline{\mathbf{B}}^\circ \underline{\Delta} = \{\Delta \in \underline{\Delta} | \overline{\sigma}(\Delta) < 1\} \quad (2.52)$$

On définit la valeur singulière structurée (*angl.* structured singular value) (s.s.v.) par le nombre réel positif $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_{\underline{\Delta}}(M)} = \inf_{\Delta \in \underline{\Delta}} \{\overline{\sigma}(\Delta) | \det(I - M\Delta) = 0\} \\ \mu_{\underline{\Delta}}(M) = 0 \text{ si } \forall \Delta \in \underline{\Delta}, \det(I - M\Delta) \neq 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{cases} (\mu_{\underline{\Delta}}(M))^{-1} = \inf \{k \in \mathbb{R}_+ | \exists \Delta \in k\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta} \text{ tel que } \det(I - M\Delta) = 0\} \\ \mu_{\underline{\Delta}}(M) = 0 \text{ si } \forall k \in \mathbb{R}_+, \forall \Delta \in k\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}, \det(I - M\Delta) \neq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

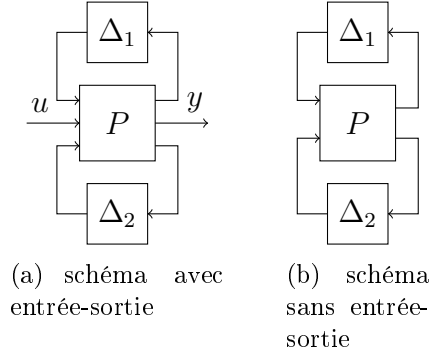


FIGURE 2.11 – Schémas pour ν -analyse

Afin de simplifier les notations, définissons $R_{\underline{\Delta}}(M) = \frac{1}{\mu_{\underline{\Delta}}(M)}$ et $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{R}_+ | \exists \Delta \in k\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta} \text{ tel que } \det(I - M\Delta) = 0\}$. En d'autres termes, $R_{\underline{\Delta}}(M)$ pourrait être défini comme étant le « rayon » de la plus grande boule ouverte centrée en zéro dans laquelle toutes les perturbations structurées $\Delta \in \underline{\Delta}$ vérifient $\det(I - M\Delta) \neq 0$. Dans le cas où Δ est réel, on peut même aller plus loin, et affirmer que $\forall \Delta \in R_{\underline{\Delta}}(M)\underline{\mathbf{B}}^{\circ}\underline{\Delta}$ on a $\det(I - M\Delta) > 0$ (conséquence de la continuité de l'application $\Delta \mapsto \det(I - M\Delta)$).

Quelques propriétés

1. $\mu(M) = \mu(M^*)$.
2. Si $\underline{\Delta} = \mathbb{C}^{n \times n}$, alors $\mu_{\underline{\Delta}}(M) = \bar{\sigma}(M)$.
3. $\mu(\alpha M) = |\alpha|\mu(M)$;
4. $\mu(I) = 1$;
5. $\mu(AB) \leq \mu(A)\bar{\sigma}(B)$;
6. $\mu(\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta)$, $\forall \Delta \in \underline{\Delta}$.

Définition de la s.s.v. dissymétrique pour M et Δ constants

Soient $m_{r1}, m_{r2}, m_{c1}, m_{c2}, m_{C1}$ et m_{C2} d'une part, et $k_1, \dots, k_{(m_{r1}+m_{c1}+m_{C1})}$, $l_1, \dots, l_{(m_{r2}+m_{c2}+m_{C2})}$ d'autre part, des entiers naturels. On définit les ensembles $\underline{\Delta}_1$ et $\underline{\Delta}_2$ par :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_1 = \{ & \Delta = \text{diag}(\delta_1^{r1} I_{k_1}, \dots, \delta_{m_{r1}}^{r1} I_{k_{m_{r1}}}, \delta_1^{c1} I_{k_{m_{r1}+1}}, \dots, \delta_{m_{c1}}^{c1} I_{k_{m_{r1}+m_{c1}}}, \\ & \Delta_1^{C1}, \dots, \Delta_{m_{C1}}^C) \text{ avec } \forall i \in [1, m_{r1}], \delta_i^{r1} \in \mathbb{R}; \quad \forall j \in [1, m_{c1}], \delta_j^{c1} \in \mathbb{C}, \\ & \forall q \in [1, m_{C1}], \Delta_q^{C1} \in \mathbb{C}^{k_{m_{r1}+m_{c1}+q} \times k_{m_{r1}+m_{c1}+q}} \} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_2 = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1^{r_2} I_{l_1}, \dots, \delta_{m_{r_2}}^{r_2} I_{l_{m_{r_2}}}, \delta_1^{c_2} I_{l_{m_{r_2}+1}}, \dots, \delta_{m_{c_2}}^{c_2} I_{l_{m_{r_2}+m_{c_2}}}, \\ \Delta_1^{C_2}, \dots, \Delta_{m_{C_2}}^{C_2}) \text{ avec } \forall i \in [1, m_{r_2}], \delta_i^r \in \mathbb{R}; \quad \forall j \in [1, m_{c_2}], \delta_j^c \in \mathbb{C}, \\ \forall q \in [1, m_{C_2}], \Delta_q^{C_2} \in \mathbb{C}^{l_{m_{r_2}+m_{c_2}+q} \times l_{m_{r_2}+m_{c_2}+q}} \} \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{B}\underline{\Delta}_1 = \{ \Delta \in \underline{\Delta}_1 | \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \} \quad (2.57)$$

On définit la valeur singulière dissymétrique (ou ν) par les équations suivantes, dans lesquelles $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$.

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu_{(\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2)}(M)} = \inf_{\substack{\Delta_1 \in \mathbf{B}\underline{\Delta}_1 \\ \Delta_2 \in \underline{\Delta}_2}} \{ \bar{\sigma}(\Delta_2) | \det(I - M\Delta) = 0 \} \\ \nu_{(\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2)}(M) = 0 \text{ si } \forall (\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbf{B}\underline{\Delta}_1 \times \underline{\Delta}_2, \det(I - M\Delta) \neq 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\begin{cases} (\nu_{(\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2)}(M))^{-1} = \inf \{ k \in \mathbb{R}_+ | \exists (\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbf{B}\underline{\Delta}_1 \times k\mathbf{B}\underline{\Delta}_2, \\ \text{tel que } \det(I - M\Delta) = 0 \} \\ \nu_{(\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2)}(M) = 0 \text{ si } \forall k \in \mathbb{R}_+, \forall (\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbf{B}\underline{\Delta}_1 \times k\mathbf{B}\underline{\Delta}_2, \det(I - M\Delta) \neq 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Remarques concernant la définition de ν :

- Comme l'indique son nom, la nouvelle quantité définie est dissymétrique. C'est à dire que $\nu_{(\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2)}(M) \neq \nu_{(\underline{\Delta}_2, \underline{\Delta}_1)}(M)$

2.3.3 Cas où Δ est structuré, linéaire et stationnaire

Lorsque M et Δ sont des systèmes linéaires stationnaires stables, leurs transformées de Laplace ne sont fonctions que de s , et pour tout $\omega \in [0, \infty[$, $M(j\omega)$ et $\Delta(j\omega)$ sont des matrices (constantes) complexes, et la stabilité de la boucle fermée est assurée si pour tout $\omega \in [0, \infty[$, on a $\det(I - M(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0$. On peut donc se ramener à la situation précédente, en considérant les transformées de Laplace de M et de Δ . En notant \mathcal{S} l'ensemble des systèmes linéaires stationnaires (LTI), on pourrait écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta} = \{ \Delta \in \mathcal{S} | \forall \omega \in \mathbb{R}, \Delta(j\omega) = \text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \\ \delta_1^c I_{k_{m_r}+1}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r}+m_c}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) \\ \text{avec } \forall i \in [1, m_r], \delta_i^r \in \mathbb{R}; \quad \forall j \in [1, m_c], \delta_j^c \in \mathbb{C}, \\ \forall q \in [1, m_C], \Delta_q^C \in \mathbb{C}^{k_{m_r}+m_c+q \times k_{m_r}+m_c+q} \} \end{aligned} \quad (2.60)$$

On a alors :

$$\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(M) = \sup_{\omega \in [0, \infty[} \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \quad (2.61)$$

2.3.4 Cas où Δ contient des éléments linéaires non-stationnaires

A cause de l'introduction d'éléments non-stationnaires dans Δ , on ne peut plus affirmer que la boucle fermée est stationnaire. A priori, la boucle fermée est non-stationnaire (LTV). Cependant, sans autre hypothèse, on est déjà en mesure de donner une borne supérieure de $R_{\underline{\Delta}_{LTV}}(M)$. En effet, un système LTI est LTV, c'est à dire $\underline{\Delta}_{LTI} \subset \underline{\Delta}_{LTV}$, donc a priori,

$$R_{\underline{\Delta}_{LTV}}(M) \leq R_{\underline{\Delta}_{LTI}}(M) \quad (2.62)$$

A priori, on ne peut plus écrire $\Delta(s)$, au mieux on pourrait définir pour tout $t > 0$, une quantité $\Delta(t, s)$. Cependant, on peut tout à fait avoir $\det(I - M(j\omega)\Delta(t, j\omega)) \neq 0$, (pour tout $t > 0$ et pour tout $\omega \geq 0$) avec une boucle fermée instable (cf. Annexe B page 165 pour un (contre-)exemple). On ne peut donc pas proposer de définition de μ de la même manière que précédemment. A défaut, on cherchera juste à calculer $R_{\underline{\Delta}}(M)$.

Il n'est généralement pas facile d'évaluer $R_{\underline{\Delta}_{LTV}}(M)$ lorsque Δ est LTV. Cependant, il existe un cas particulier pour lequel il est possible de déterminer $R_{\underline{\Delta}_{LTV}}(M)$, c'est lorsque tous les éléments de Δ sont LTV, grâce au théorème suivant (cf. [57]).

Soit $\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}$ l'ensemble des opérateurs Δ tels qu'il existe $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{m_r}, n_1, \dots, n_{m_c}, \tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_{m_r}, \delta_1, \dots, \delta_{m_c}, \Delta_1, \dots, \Delta_{m_F}$ tels que :

$$\Delta = \text{diag}(\tilde{\delta}_1 I_{\tilde{n}_1}, \dots, \tilde{\delta}_{m_r} I_{\tilde{n}_{m_r}}, \delta_1 I_{n_1}, \dots, \delta_{m_c} I_{n_{m_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{m_F}) \quad (2.63)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\delta}_i : l_2 \rightarrow l_2 & \text{LTV, auto-adjoint et } \|\tilde{\delta}_i\| \leq 1 \\ \delta_i : l_2 \rightarrow l_2 & \text{LTV et } \|\delta_i\| \leq 1 \\ \Delta_i : l_2^{q_i} \rightarrow l_2^{q_i} & \text{LTV et } \|\Delta_i\| \leq 1 \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\mathcal{D} = \{D = \text{diag}(\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_{m_r}, D_1, \dots, D_{m_c}, d_1 I_{q_1}, \dots, d_{m_F} I_{q_{m_F}}); \text{ tel que } 0 < D = D^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\} \quad (2.65)$$

$$\mathcal{G} = \{G = \text{diag}(\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_{m_r}, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0); \text{ tel que } G = G^* \in j\mathbb{R}^{n \times n}\} \quad (2.66)$$

Théorème 4 Soient M une matrice de transfert LTI stable, et $\beta > 0$. La boucle fermée de la FIGURE 2.10(a) est uniformément stable de manière robuste par rapport à $\frac{1}{\beta}\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}$ si et seulement s'il existe des matrices constantes $D \in \mathcal{D}$ et $G \in \mathcal{G}$ telles que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad M(j\omega)DM(j\omega)^* + j(GM(j\omega)^* - M(j\omega)G) < \beta^2 D \quad (2.67)$$

Dans cette situation, on a donc, $R_{\underline{\Delta}_{LTV}}(M) = \frac{1}{\beta}$ et $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}_{LTV}}(M) = \beta$. Mais en général, lorsque Δ contient des éléments LTI et LTV, on n'est en mesure que de proposer une borne supérieure, grâce à la proposition suivante.

Sans perte de généralité, on peut considérer que $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$, où Δ_1 est un transfert LTI et Δ_2 un transfert LTV, tous deux structurés et de tailles données, et on note $\underline{\Delta}$ l'ensemble de ces Δ . Pour la proposition, on note de manière générique Δ , D et G les matrices ayant les structures suivantes :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_n I_{q_n}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_m^C) \quad (2.68)$$

$$D = \text{diag}(D_1, \dots, D_n, d_1 I_{r_1}, \dots, d_m I_{r_m}) \quad (2.69)$$

$$G = \text{diag}(G_1, \dots, G_n, 0, \dots, 0) \quad (2.70)$$

avec δ_i réel, Δ_1^C matrice complexe, $D = D^* > 0$, et $G = G^*$.

Proposition 2 *Supposons que $M(s)$ soit asymptotiquement stable. Soit $D_1(\omega) = D_1^*(\omega) > 0$ et $G_1(\omega) = G_1^*(\omega)$ des matrices de mise à l'échelle fonction de la fréquence dont la structure correspond à celle de Δ_1 . Soient alors $D_2 = D_2^* > 0$ et $G_2 = G_2^*$ des matrices de mise à l'échelle constantes dont la structure correspond à celle de Δ_2 . Supposons que D_2 est une matrice réelle et G_2 une matrice imaginaire. Soit $\mathcal{D}(\omega) = \text{diag}(D_1(\omega), D_2)$ et $\mathcal{G}(\omega) = \text{diag}(G_1(\omega), G_2)$. Une condition suffisante pour que l'interconnexion $M(s) - \Delta$ reste stable $\forall \Delta \in \frac{1}{\beta} \underline{\mathbf{B}^o \Delta}$ est que $\forall \omega \in [0, +\infty)$:*

$$M(j\omega)\mathcal{D}(\omega)M^*(j\omega) + j(\mathcal{G}(\omega)M^*(j\omega) - M(j\omega)\mathcal{G}(\omega)) < \beta^2 \mathcal{D}(\omega) \quad (2.71)$$

On en déduit donc que :

$$R_{\underline{\Delta}}(M) \geq \frac{1}{\beta} \text{ et } \mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(M) \leq \beta \quad (2.72)$$

En fait, β représente une borne supérieure de $\sup_{\omega} \mu(M(j\omega))$ lorsque Δ est LTI. (Voir le chapitre 2.4 (page 56) pour plus de détails).

2.3.5 Cas où Δ contient des éléments non-linéaires

Lorsque Δ contient des éléments non-linéaires, le principal élément nouveau est que, dans le cas général, la constante de Lipschitz n'est pas la « norme » induite L_2 . A priori, il n'existe pas de relation entre ces deux « normes ». Cependant, dans le cas particulier où $\Delta(0) = 0$, on a

$$\|\Delta\|_{iL_2} \leq \|\Delta\|_{lip,2} \quad (2.73)$$

Par la suite, on considèrera que l'on a toujours $\Delta(0) = 0$, car il correspond au cas que l'on souhaite étudier dans cette thèse.

En général, il n'y a pas égalité, et on peut se référer à l'Annexe C pour trouver un exemple de fonction Δ pour laquelle on a une « norme » induite L_2 finie, avec Δ qui n'est pas lipschitzienne (constante de Lipschitz infinie, donc Δ non borné).

Cet élément est très important, car il faut alors se montrer prudent afin de ne pas confondre ces deux notions qui, pour un système non-linéaire, sont différentes. Et puisque notre démarche consiste principalement à se référer au « théorème des petits gains », il semble naturel de ne considérer *que* la constante de Lipschitz. En effet, a priori, en se rapportant à la première version du théorème des petits gains, si l'on a L non-linéaire, et $\|L\|_{iL_2} < 1$, le théorème des petits gains ne permet pas de conclure sur la stabilité de la boucle fermée.

On est donc amené à redéfinir $\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}$ et $\underline{\mathbf{B}}^\circ\underline{\Delta}$ par :

$$\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta} = \{\Delta \in \underline{\Delta} \mid \|\Delta\|_{lip,2} \leq 1\} \quad (2.74)$$

$$\underline{\mathbf{B}}^\circ\underline{\Delta} = \{\Delta \in \underline{\Delta} \mid \|\Delta\|_{lip,2} < 1\} \quad (2.75)$$

Mais, bien que considérer les opérateurs non-linéaires semble d'un abord plus délicat, on est tout de même en mesure de proposer quelques éléments. En effet, en entendant le terme « non-linéaire » dans son sens large (c'est à dire pas comme la simple négation de « linéaire », et par la même ne pas simplement considérer l'ensemble complémentaire à celui des systèmes linéaires), l'ensemble des systèmes linéaires non-stationnaires (noté provisoirement $\underline{\Delta}_{LTV}$) peut être considéré comme un sous-ensemble de celui des systèmes non-linéaires (noté provisoirement $\underline{\Delta}_{NL}$). La conséquence est que l'on peut alors écrire que

$$R_{\underline{\Delta}_{NL}}(M) \leq R_{\underline{\Delta}_{LTV}}(M) \quad (2.76)$$

Tout comme précédemment, on s'intéresse à un ensemble $\underline{\Delta}$ d'opérateurs structurés, mais ici supposés non-linéaires. Sans perdre de généralité, on peut décrire $\underline{\Delta}$ par :

$$\underline{\Delta} = \{diag(\Delta_{NL}, \Delta_L) \mid \Delta_{NL} \text{ opérateur Non-Linéaire, et } \Delta_L \text{ opérateur Linéaire}\} \quad (2.77)$$

$$\Delta_L \text{ opérateur Linéaire} \quad (2.78)$$

Pour traiter une telle situation, le principal théorème est celui dit du « critère du cercle ».

Le critère du cercle

Définition 14 (Opérateur complémentaire de troncature)

$$\begin{aligned} \overline{P_T} : E &\longrightarrow E \\ x &\mapsto \overline{P_T}(x) \end{aligned} \quad (2.79)$$

avec pour tout $x \in E$,

$$\overline{P_T}(x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, T] \\ x(t) & \text{pour } t \in]T, +\infty[\end{cases} \quad (2.80)$$

Définition 15 (Système sans mémoire) *Un système (\mathcal{S}) est dit sans mémoire si*

$$\forall T \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E, \quad \overline{P_T}(\mathcal{S}[u]) = \overline{P_T}(\mathcal{S}[\overline{P_T}(u)]) \quad (2.81)$$

Dans cette partie, on s'intéresse au système (\mathcal{S}) défini par :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -\psi(t, y) \end{cases} \quad (2.82)$$

où (A, B) est commandable, (A, C) est observable, et

$$\begin{aligned} \psi : [0, \infty[\times \mathbb{R}^{n_y} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n_y} \\ (t, y) &\mapsto \psi(t, y) \end{aligned} \quad (2.83)$$

est un opérateur sans mémoire, potentiellement non-stationnaire et non-linéaire qui est continu par morceau en t et localement lipschitzien en y .

Définition 16 (Condition de secteur ([47])) *Un opérateur non-linéaire et sans mémoire $\psi(\cdot, \cdot)$ est dit satisfaire une condition de secteur, s'il existe des matrices K_{\min} , K_{\max} et un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_y}$ tels que*

- $K = K_{\max} - K_{\min}$ est une matrice symétrique définie positive ;
- Γ est un ensemble connexe dont 0 est un élément ;

et

$$\forall t \geq 0, \forall y \in \Gamma, [\psi(t, y) - K_{\min}y]^T [\psi(t, y) - K_{\max}y] \leq 0 \quad (2.84)$$

Si $\Gamma = \mathbb{R}^{n_y}$, alors $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition de secteur de manière globale, et dans ce cas on dira que $\psi(\cdot, \cdot)$ appartient au secteur $[K_{\min}, K_{\max}]$. Si l'expression (2.84) peut être établie avec des inégalités strictes, alors on dira que $\psi(\cdot, \cdot)$ appartient au secteur $]K_{\min}, K_{\max}[$.

Définition 17 (Stabilité absolue ([47])) *Soit le système (\mathcal{S}) décrit par les équations (2.82, 2.83), où $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition de secteur selon la définition 16. Le système est absolument stable si l'origine est globalement uniformément asymptotiquement stable pour toute non-linéarité dans le secteur donné. Il est absolument stable avec un domaine fini si l'origine est uniformément asymptotiquement stable.*

Définition 18 (Hurwitz) Soit $Z(s)$ une fonction matricielle de transfert rationnelle. On dira que $Z(s)$ est hurwitz si tous les pôles de chacun des éléments de la matrice $Z(s)$ ont une partie réelle strictement négative.

Définition 19 (réel positivité) Soit $Z(s)$ une fonction matricielle de transfert rationnelle propre. On dit que $Z(s)$ est réel positif si

- Tous les éléments de $Z(s)$ sont analytiques pour $\text{Re}(s) > 0$;
- Les pôles imaginaires pures des éléments de $Z(s)$ sont simples et la matrice des résidus associée de $Z(s)$ est hermitienne semi-définie positive ;
- Pour tout réel ω tel que $j\omega$ n'est un pôle d'aucun élément de $Z(s)$, la matrice $Z(j\omega) + Z^T(j\omega)$ est semi-définie positive.

La fonction de transfert $Z(s)$ est dite strictement positive réel si $Z(s - \epsilon)$ est positive réel pour tout $\epsilon > 0$.

Théorème 5 (Critère du cercle ([47])) Soit le système (\mathcal{S}) décrit par les équations (2.82, 2.83), avec les conditions définies précédemment. Si $\psi(\cdot, \cdot)$ appartient au secteur $[K_{\min}, K_{\max}]$. Alors le système est absolument stable si

$$G_T(s) = G(s) (I + K_{\min} G(s))^{-1} \quad (2.85)$$

est hurwitz et

$$Z_T(s) = (I + K_{\max} G(s)) (I + K_{\min} G(s))^{-1} \quad (2.86)$$

est réel strictement positive, avec

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.87)$$

Si la condition de secteur est satisfaite seulement sur un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_y}$, alors les conditions données sur $G_T(s)$ et $Z_T(s)$ garantissent que le système est absolument stable avec un domaine fini.

Autres méthodes

Pour traiter le cas où Δ est non-linéaire, il existe aussi une approche générale, que sont les IQC (*angl.* Integral Quadratic Constraints : Contraintes Intégrales Quadratiques). Notons $\mathcal{I}_M(\Delta)$, l'opérateur défini par

$$\mathcal{I}_M(\Delta) = \begin{pmatrix} I & -\Delta \\ M & -I \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Théorème 6 Soit $\Pi : \omega \mapsto \Pi(\omega)$ une application qui associe à tout $\omega \in \mathbb{R}$ une matrice hermitienne $\Pi(\omega)$ bornée telle que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \|\Pi(\omega)\| \leq p \quad (2.89)$$

Supposons que $\Delta \in \underline{\Delta}$ a un gain L_2 incrémental et satisfait

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \Delta(z_1)(\omega) - \Delta(z_2)(\omega) \\ z_1(\omega) - z_2(\omega) \end{pmatrix}^* \Pi(\omega) \begin{pmatrix} \Delta(z_1)(\omega) - \Delta(z_2)(\omega) \\ z_1(\omega) - z_2(\omega) \end{pmatrix} d\omega \geq 0 \quad (2.90)$$

$\forall z_1, z_2 \in L_2^l$. S'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} I \\ M(\omega) \end{pmatrix}^* \Pi(\omega) \begin{pmatrix} I \\ M(\omega) \end{pmatrix} \leq -\epsilon I \quad (2.91)$$

alors le schéma de la FIGURE 2.10(a) est bien posé, et stable de manière interne.

On peut aussi citer les travaux de V.Fromion, M.G.Safonov et G.Scorletti, ([35]) qui proposent aussi des solutions au problème présenté dans cette partie.

2.3.6 Mesures de performance par μ -analyse

Soient $\underline{\Delta}_1$ et $\underline{\Delta}_2$, deux ensembles de matrices (structurées ou pas) de tailles respectives n_1 et n_2 . On note $\underline{\Delta} = \{\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2) | \Delta_1 \in \underline{\Delta}_1 \text{ et } \Delta_2 \in \underline{\Delta}_2\}$. Soit P une matrice complexe. L'objet de cette partie consiste à étudier la situation représentée par la FIGURE 2.12. Dans cette situation, on dispose du théorème suivant.

Théorème 7 (Théorème de la boucle principale) Soit $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ une matrice complexe.

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) < 1 \iff \begin{cases} \mu_{\underline{\Delta}_1}(P_{11}) < 1 \\ \text{et} \\ \max_{\Delta_1 \in \underline{\Delta}_1} [\mu_{\underline{\Delta}_2}(\mathcal{F}_u(P, \Delta_1))] < 1 \end{cases} \quad (2.92)$$

Ce théorème est très important pour pouvoir étudier les performances L_2 -robuste d'un système soumis à des incertitudes linéaires, car il est à l'origine des deux suivants. En effet, considérons maintenant que P est un système LTI, et notons $N_\gamma(s) = P(s) \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I_{n_2} \end{bmatrix}$. De même, on considérera par la suite que Δ_1 et Δ_2 sont aussi des opérateurs linéaires. On a alors que $T_{u \rightarrow y} = \mathcal{F}_u(P, \Delta_1)$ est aussi un opérateur linéaire. Et donc, lorsqu'en plus $\|T_{u \rightarrow y}\|_{L_2}$ existe, on dispose du théorème suivant.

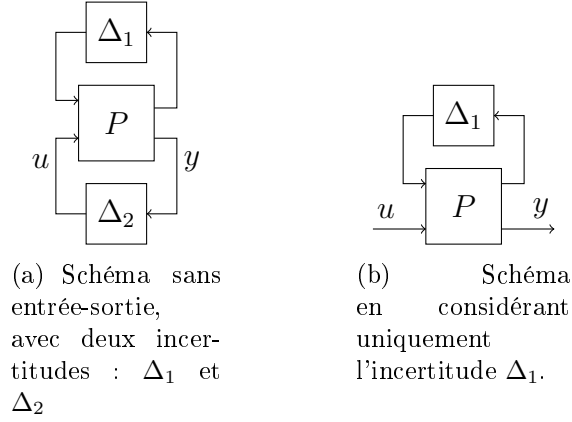


FIGURE 2.12 – Schémas pour une analyse de robustesse.

Théorème 8 Si $\underline{\Delta}_1$ représente un ensemble de systèmes LTI structurés, et si $\underline{\Delta}_2$ représente un ensemble de systèmes LTI non structurés, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall \Delta_1 \in \mathbf{B}^\circ \underline{\Delta}_1, \|T_{u \rightarrow y}\|_{iL_2} < \gamma ;$
- $\forall \omega \in \mathbb{R}, \nu_{\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2}(P(j\omega)) < \gamma.$
- $\forall \omega \in \mathbb{R}, \mu_{\underline{\Delta}}(N_\gamma(j\omega)) < 1.$

Ce dernier théorème peut être généralisé lorsque $\underline{\Delta}_2$ regroupe aussi des systèmes linéaires LTV.

Théorème 9 Si $\underline{\Delta}_1$ représente un ensemble de systèmes linéaires continus, et si $\underline{\Delta}_2$ représente un ensemble de systèmes LTI non structurés, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall \Delta_1 \in \mathbf{B}^\circ \underline{\Delta}_1, \|T_{u \rightarrow y}\|_{iL_2} < \gamma ;$
- $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}(N_\gamma) < 1.$

Remarque : Afin d'alléger les notations, par la suite, lorsque le contexte sera suffisamment clair, les indices des quantités μ et ν seront omis. C'est à dire que $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$ sera noté $\mu(M)$, et $\nu_{(\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2)}(M)$ sera noté $\nu(M)$.

2.4 Une technique d'analyse d'une boucle fermée linéaire

2.4.1 Introduction

A cause des nombreux avantages présentés par la μ -analyse dans la section 2.3 (page 42), en Automatique, on cherche à calculer la quantité μ . Cependant le calcul de la s.s.v. (μ) est NP-difficile (NP pour « Non déterministe Polynomiaux »)([14]). Cela signifie que le problème de décision équivalent est au moins aussi difficile que le plus difficile des problèmes de classe NP. Par conséquent, bien souvent, pour les problèmes de grande taille, on renonce à calculer la valeur exacte, et on cherche plutôt à calculer une borne supérieure et une borne inférieure. Toutefois, dans notre cas, on est surtout intéressé par une quantité que l'on a noté $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}$ dans la section 2.3, et qui correspond à $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\underline{\Delta}}$ lorsque $\underline{\Delta}$ regroupe des transferts LTI, et lorsque $\underline{\Delta}$ regroupe aussi des transferts LTV, on sait qu'une certaine borne supérieure de $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu$, qui a été brièvement présentée dans la section 2.3, est une borne supérieure de $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}$. Dans ce chapitre, on s'intéressera donc tout particulièrement à cette borne supérieure de μ , dans l'intention d'obtenir une borne supérieure (la plus proche possible) de $\mathcal{M}_{\underline{\Delta}}$. Pour plus de précisions, on peut se référer à [23].

2.4.2 Quelques bornes de μ

Une borne supérieure dans le cas complexe

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{D = \text{diag}(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{k_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_C} I_{k_{m_r+m_c+m_C}}) \\ &\quad \text{avec } \forall i \in [1, m_r+m_c], D_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, D_i = D_i^* > 0 \text{ et} \\ &\quad \forall j \in [1, m_C], d_j \in \mathbb{R} \text{ et } d_j > 0\} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\mu(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (2.94)$$

$$\inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) = \inf_{D \in \mathcal{D}} \sqrt{\bar{\lambda}(M^*DM, D)} \quad (2.95)$$

avec $\bar{\lambda}(A, B) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid \det(A - \gamma B) = 0\}$. C'est un problème LMI mettant en œuvre la minimisation d'une valeur propre généralisée maximale.

Une borne supérieure dans le cas mixte

La borne supérieure précédente traite de manière indifférenciée les scalaires incertains réels et complexes. Afin de prendre en compte les spécificités des scalaires incertains réels, un coefficient supplémentaire est introduit à partir de l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \{ & G = \text{diag}(G_1, \dots, G_{m_r}, 0_{k_{m_r+1}}, \dots, 0_{k_{m_r+m_c+m_C}}) \\ & \text{avec } \forall i \in [1, m_r], G_i = G_i^* \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i} \} \end{aligned} \quad (2.96)$$

On construit alors une borne supérieure de μ par (cf. [21]) :

$$\mu(M) \leq \sqrt{\max \left(0, \inf_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ G \in \mathcal{G}}} \bar{\lambda}(M^*DM + j(GM - M^*G), D) \right)} \quad (2.97)$$

De manière équivalente, cela revient à résoudre le problème d'optimisation suivant (lorsque la solution existe) :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } \beta, \text{ sous les contraintes} \\ & M^*DM + j(GM - M^*G) < \beta^2 D \text{ et } D \in \mathcal{D}, G \in \mathcal{G} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Là encore, il s'agit d'un problème de valeur propre généralisée, qui est un problème standard en LMI. On peut consulter [13], et les références incluses pour plus de détails.

2.4.3 Analyse de stabilité robuste par une technique de balayage fréquentiel : Algorithme de Ferreres et Roos

Dans l'article [30], il est proposé un algorithme de synthèse d'une précommande en présence d'incertitudes variantes dans le temps et d'incertitudes invariantes dans le temps. Pour cet algorithme, il est aussi réalisé une μ -analyse par une technique de balayage fréquentiel. Ici, on ne s'intéressera donc qu'à la partie destinée à l'*analyse de stabilité robuste*.

Le principe consiste à calculer une borne supérieure de la valeur de μ sur un ensemble fini de fréquences (un maillage), pour ensuite proposer des bornes supérieures sur les intervalles définis par ces fréquences. Puis, par validation, il est alors calculé les fréquences pour lesquelles la valeur de μ est plus

grande que la borne supérieure proposée. Ces fréquences sont alors ajoutées au maillage initial, réduisant ainsi l'écart entre des fréquences du maillage là où la contrainte n'est pas respectée. La convergence de l'algorithme est assurée par le fait que si le maillage est suffisamment fin, une borne supérieure de μ peut être calculée qui correspond à la borne supérieure des deux extrémités de l'intervalle. Cela revient à majorer la s.s.v. par une fonction en escalier.

On s'intéresse à la stabilité robuste du schéma de la FIGURE 2.13.

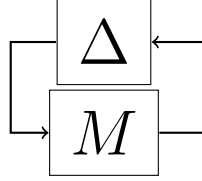


FIGURE 2.13 – Interconnexion sous forme LFT

Proposition 3 *Supposons que $M(s)$ est asymptotiquement stable. Soit $D_1(\omega) = D_1^*(\omega) > 0$ et $G_1(\omega) = G_1^*(\omega)$ des matrices de mise à l'échelle fonction de la fréquence dont la structure correspond à celle de Δ_1 . Soient alors $D_2 = D_2^* > 0$ et $G_2 = G_2^*$ des matrices de mise à l'échelle constantes dont la structure correspond à celle de Δ_2 . Supposons que D_2 est une matrice réelle et G_2 une matrice imaginaire. Soient $\mathcal{D}(\omega) = \text{diag}(D_1(\omega), D_2)$ et $\mathcal{G}(\omega) = \text{diag}(G_1(\omega), G_2)$. Une condition suffisante pour que l'interconnexion $M(s) - \Delta$ (cf. FIGURE 2.13) reste stable $\forall \Delta \in \frac{1}{\beta} \underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\Delta}$ est que $\forall \omega \in [0, +\infty)$:*

$$M(j\omega)\mathcal{D}(\omega)M^*(j\omega) + j(\mathcal{G}(\omega)M^*(j\omega) - M(j\omega)\mathcal{G}(\omega)) < \beta^2\mathcal{D}(\omega) \quad (2.99)$$

Proposition 4 *Les deux problèmes suivants sont équivalents :*

- Existe-t-il des matrices de mise à l'échelle $D_1(\omega) = D_1^*(\omega) > 0$ et $G_1(\omega) = G_1^*(\omega)$ telles que pour $\omega \in [0, +\infty[$, l'inégalité (2.99) est respectée, avec $\mathcal{D}(\omega) = \text{diag}(D_1(\omega), D_2)$ et $\mathcal{G}(\omega) = \text{diag}(G_1(\omega), G_2)$?
- Existe-t-il des matrices de mise à l'échelle $\tilde{D}_1(\omega)$ et $\tilde{G}_1(\omega)$ telles que pour tout $\omega \in [0, +\infty[$:

$$\bar{\sigma} \left[\left(\tilde{D}_1(\omega)F(j\omega)\tilde{D}_1^{-1}(\omega) - j\tilde{G}_1(\omega) \right) \left(I + \tilde{G}_1^2(\omega) \right)^{-1/2} \right] \leq 1 \quad (2.100)$$

$\tilde{D}_1(\omega) = \text{diag}(\tilde{D}_1(\omega), I)$ et $\tilde{G}_1(\omega) = \text{diag}(\tilde{G}_1(\omega), 0)$? Avec $F(j\omega)$ défini par :

$$F(j\omega) = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2 \end{pmatrix} \beta^{-1} M^*(j\omega) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2^{-1} \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G}_2 \end{pmatrix} \right] F_1 \quad (2.101)$$

$$\text{avec } F_1 = \text{diag} \left(I, \left(I + \tilde{G}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \text{ où } \tilde{D}_2 = D_2^{\frac{1}{2}} \text{ et } \tilde{G}_2 = D_2^{-\frac{1}{2}} G_2 D_2^{-\frac{1}{2}}$$

Important : Pour prendre en compte les paramètres incertains invariants dans le temps, les matrices de mise à l'échelle (D et G) doivent être fonction de la fréquence, alors que pour prendre en compte les paramètres variants dans le temps, ces matrices doivent être constantes. La proposition précédente permet de se ramener à la vérification d'un système qui ne contient pas de matrices de mise à l'échelle fonction de la fréquence.

Algorithme optimal pour le calcul d'une borne inférieure de la marge de robustesse.

1. Soit $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$ un maillage fréquentiel initial (de petite taille)
2. Résoudre le problème de valeur propre généralisé (2.99) de la proposition 3 sur le maillage fréquentiel. Soit $\beta_{LB, N}$ la valeur minimisée, D_2 et G_2 les valeurs associées des matrices constantes de mise à l'échelle.
3. Pour ces valeurs, soit $\beta = (1 + \epsilon)\beta_{LB, N}$, avec $\epsilon > 0$. Vérifier (2.99) avec une technique de balayage fréquentiel [27]. Si c'est vérifié, β est une borne supérieure de β^* , et le minimum global est calculé avec une précision satisfaisante ϵ : STOP. Sinon, soit $\tilde{\omega}$ une valeur pire cas de la fréquence, où (2.99) n'est pas satisfaite. Inclure $\tilde{\omega}$ dans le maillage et retourner à l'étape 2.

Algorithme sous optimal pour le calcul d'une borne inférieure de la marge de robustesse.

1. Soit $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$ un maillage fréquentiel initial (de petite taille), et D_2 , G_2 les valeurs initiales des matrices constantes de mise à l'échelle.
2. Pour les valeurs actuelles D_2 , G_2 des matrices constantes de mise à l'échelle, réaliser une optimisation sur le maillage par rapport à $D_1(\omega_i)$ et $G_1(\omega_i)$ afin de minimiser β dans l'inégalité (2.99). Cela est fait en transformant tout d'abord la formulation LMI (2.99) en une formulation en $\bar{\sigma}$ (en utilisant la proposition 4, voir aussi [30]), puis en réalisant une recherche par dichotomie de β .
3. Pour ces valeurs de $D_1(\omega_i)$ et $G_1(\omega_i)$ déterminées à l'étape 2, résoudre le problème d'optimisation de la proposition 3 par rapport à D_2 et G_2 . Soit $\beta_{N_{min}}$ la valeur minimisée de β , et D_2 , G_2 les valeurs correspondantes des matrices constantes de mise à l'échelle. Si $\beta_{N_{min}} < (1 - \eta)\beta_N$, avec β_N la valeur de β au début de l'étape 2 et $\eta > 0$ un seuil donné, cela signifie que cela vaut la peine de poursuivre l'optimisation et le processus de minimisation de β . Dans ce cas, soit $\beta = \beta_{N_{min}}$ et aller à l'étape 2. Sinon, soit $\beta = \beta_{N_{min}}$ et continuer à l'étape 4.

4. Soit $\beta = (1 + \epsilon)\beta$ avec $\epsilon > 0$. En considérant les valeurs D_2, G_2 déterminées à l'étape 3, vérifier (2.99) sur toute la plage fréquentielle avec une technique de μ -analyse par balayage fréquentiel (voir paragraphe 2.4.3). Si cela est satisfait, arrêter, puisque β est une borne supérieure de β^* . Sinon, soit $\tilde{\omega}$ une valeur pire cas de la fréquence, où (2.99) n'est pas vérifié. Inclure $\tilde{\omega}$ dans le maillage et aller à l'étape 2.

Les valeurs initiales de D_2 et G_2 peuvent être choisies arbitrairement, par exemple $D_2 = I$ et $G_2 = 0$. Une autre solution consiste à modifier légèrement l'algorithme en réalisant une première itération optimale en utilisant l'algorithme optimal et alors basculer sur l'algorithme sous-optimal. L'initialisation des paramètres et des matrices de mise à l'échelle peut alors être évitée sans pénaliser le coût total du calcul, puisque le choix d'un maillage initial suffisamment petit garantit que le nombre des variables reste raisonnable pour la résolution du problème LMI d'optimisation de la proposition 3.

Vérification a posteriori de la validité des matrices de mise à l'échelle D, G sur un intervalle de fréquences

Dans ce paragraphe, on cherchera juste à donner quelques indications sur la manière dont peut être faite la vérification de (2.99) sur toute une plage fréquentielle avec une technique de μ -analyse par balayage fréquentiel. Pour cela, dans les étapes précédentes de l'algorithme, on a déjà déterminé un maillage sur lequel l'inégalité est vérifiée. Le principe consiste donc à considérer que l'inégalité (2.99) est vérifiée pour une pulsation notée ω_0 , et de déterminer un intervalle de pulsation $[\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ autour de ω_0 , dans lequel l'inégalité est respectée. On pourra obtenir beaucoup plus de détails dans [23, 29, 27].

Dans un premier temps, on s'intéresse donc au transfert $M(s)$ de l'inégalité (2.99), et on cherche à en donner une représentation sous forme LFT, pour obtenir ainsi un bloc constant (indépendant de la fréquence), et un autre ne dépendant que de ω . Ceci est réalisé par le lemme suivant.

Lemme 1 *Soit (A, B, C, D) une représentation d'état de $M(s)$, soit m la dimension de la matrice A et ω_0 une fréquence fixée. Alors*

$$\forall \delta\omega \geq -\omega_0, \quad M(j(\omega_0 + \delta\omega)) = \mathcal{F}_l(H(\omega_0), \delta\omega I_m) \quad (2.102)$$

où

$$M_0 = \begin{pmatrix} D & \frac{C}{\sqrt{j}} \\ \frac{B}{\sqrt{j}} & -jA \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

$$T = \frac{1}{\omega_0} \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ -I_m & -I_m \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

et $H(\omega_0)$ est obtenu par le produit de Redheffer $M_0 \star T$ (cf. page 38 pour une définition de ce produit).

Pouvant maintenant écrire $M(j(\omega_0 + \delta\omega))$ sous la forme $\mathcal{F}_l(H(\omega_0), \delta\omega I_m)$, nous pouvons utiliser la proposition suivante pour déterminer un intervalle autour de ω_0 , sur lequel l'inégalité (2.99) reste valable.

Proposition 5 *Si*

$$\bar{\sigma} \left(F^{-1/4} \left(\frac{1}{\beta} \hat{D} M(j\omega_0) \hat{D}^{-1} - j\hat{G} \right) F^{-1/4} \right) < 1 \quad (2.105)$$

alors l'inégalité :

$$\bar{\sigma} \left(F^{-1/4} \left(\frac{1}{\beta} \hat{D} \mathcal{F}_l(H(\omega_0), \delta\omega I_m) \hat{D}^{-1} - j\hat{G} \right) F^{-1/4} \right) \leq 1 \quad (2.106)$$

est vérifiée pour $\omega_0 + \delta\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$, où $\underline{\omega}$ et $\bar{\omega}$ sont calculées de la manière suivante. Soient

$$H(\omega_0) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{-1/4} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} H_c \begin{bmatrix} F^{-1/4} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$H_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \hat{D} H_{11} \hat{D}^{-1} - j\hat{G} & \frac{1}{\sqrt{\beta}} \hat{D} H_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{\beta}} H_{21} \hat{D}^{-1} & H_{22} \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} I & \tilde{H}_{11} \\ \tilde{H}_{11}^* & I \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Soit alors

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{22}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{H}_{21} \\ \tilde{H}_{12}^* & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{H}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{21}^* \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Soit η_m (resp. η_p) la valeur propre réelle négative (resp. positive) de \mathcal{H} de plus grand module. Alors $\underline{\omega} = \omega_0 + \frac{1}{\eta_m}$, alors que $\bar{\omega} = \omega_0 + \frac{1}{\eta_p}$.

Le corollaire suivant permet d'expliciter le résultat attendu.

Corollaire 2 *Sous les conditions LMI :*

$$M(j\omega_0)^* D M(j\omega_0) + j(G M(j\omega_0) - M(j\omega_0)^* G) \leq \beta^2 D \quad (2.111)$$

L'inégalité

$$M(j\omega)^* D M(j\omega) + j(G M(j\omega) - M(j\omega)^* G) \leq \beta^2 D \quad (2.112)$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de ω dans l'intervalle $[\underline{\omega}, \overline{\omega}]$, où $\underline{\omega}$ et $\overline{\omega}$ sont données par la proposition 5 pour des matrices de mise à l'échelle :

$$\hat{D} = P \quad (2.113)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{\beta} U^* D^{(-1/2)} G D^{-(1/2)} U \quad (2.114)$$

La matrice unitaire U et la matrice hermitienne définie positive P sont le résultat de la décomposition polaire :

$$\left(I + \frac{1}{\beta^2} D^{-(1/2)} G D^{-1} G D^{-(1/2)} \right)^{(1/4)} D^{(1/2)} = UP \quad (2.115)$$

2.4.4 Performance L_2 -robuste

Soit P un système LTI, et Δ_1 un transfert que l'on sait appartenir à $\mathbf{B}^0 \underline{\Delta}_1$, la boule ouverte centrée en zéro de l'ensemble $\underline{\Delta}_1$ de transferts linéaires LTI et LTV structurés. Ici, on s'intéresse au schéma de la FIGURE 2.14(a), et on cherche à calculer une borne supérieure de

$$\gamma_{opt} = \sup_{\Delta_1 \in \underline{\Delta}_1} \|\mathcal{F}_u(P, \Delta_1)\|_{iL_2} \quad (2.116)$$

c'est à dire la *performance L_2 -robuste*. Certains éléments sont déjà expliqués dans la partie 2.3.6.

Pour réaliser ce calcul, on se restreindra à l'utilisation de l'algorithme de

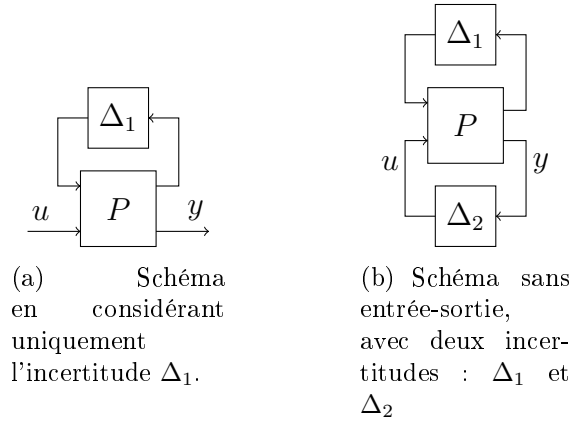


FIGURE 2.14 – Schémas pour une analyse de robustesse.

calcul de stabilité robuste vu précédemment inclus dans un algorithme par

dichotomie.

Tout comme dans la partie 2.3.6, on introduit un ensemble $\underline{\Delta}_2$, qui représente l'ensemble des transferts linéaires continus non structurés, ayant autant de sorties que $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$ n'a d'entrées, et autant d'entrées que $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$ n'a de sorties. On peut alors définir

$$\underline{\Delta} = \{\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2) | \Delta_1 \in \underline{\Delta}_1 \text{ et } \Delta_2 \in \underline{\Delta}_2\} \quad (2.117)$$

et $M_\gamma = P \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I \end{bmatrix}$. Selon ce qui a été écrit dans la partie 2.3.6, dire que $\gamma_{opt} \leq \gamma$, équivaut à affirmer la stabilité robuste de M_γ vis-à-vis de $\Delta \in \underline{\Delta}$. On utilise donc l'algorithme précédent de la manière suivante. On suppose que l'on connaît a priori un intervalle de $\gamma_{opt} \in]\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ (intervalle pouvant être très grand), et l'on essaie de calculer une borne supérieure de γ avec une précision ϵ . On utilise l'algorithme par dichotomie suivant :

Algorithme de performance L_{2r}

1. Poser $\gamma_t = \frac{1}{2}(\gamma_{min} + \gamma_{max})$;
2. Tester la stabilité robuste de M_{γ_t} vis-à-vis de $\underline{\Delta}$ à l'aide de l'algorithme précédent ;
3. Si le test conclut à la stabilité robuste, poser $\gamma_{max} = \gamma_t$ sinon $\gamma_{min} = \gamma_t$.
4. Si $|\gamma_{max} - \gamma_{min}| > \epsilon$ aller à l'étape 1, sinon, STOP.

A l'issue de cet algorithme, on dispose d'une borne supérieure (γ_{max}) de γ_{opt} , avec une précision ϵ .

Chapitre 3

Synthèse de correcteurs

3.1 Quelques éléments sur la synthèse de lois de commande modale

[55] propose de synthétiser directement un correcteur LFT en utilisant les propriétés algébriques des formes LFT. Ainsi, en appliquant un algorithme de placement de pôles initialement conçu pour les procédés linéaires stationnaires (LTI) à un procédé sous forme LFT avec les opérations adaptées, un correcteur sous forme LFT est proposé.

La « synthèse modale » est basée sur le fait que le comportement d'un système peut être analysé dans une base dite « modale ». Pour une analyse dans la base modale, les signaux d'entrée sont transformés à l'aide d'applications linéaires. L'influence de ces signaux est calculée dans la base modale, et les signaux de sortie en sont déduits à l'aide d'une nouvelle transformation linéaire. La synthèse modale prend en considération les spécifications liées à la position des pôles (stabilité interne, temps de réponse, amortissement). Principalement, elle consiste donc à placer les pôles de la boucle fermée. Mais en plus de ces spécifications, il est possible de prendre en considération des spécifications de découplage, d'insensibilité et de robustesse.

3.1.1 La notion de mode

Soit le système linéaire :

$$(S') \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ (n états), $u \in \mathbb{R}^m$ (m signaux d'entrée), $y \in \mathbb{R}^p$ (p signaux de sortie). On suppose que (S') est commandé par un retour statique de sortie

(K) , et que le signal d'entrée de référence est ajusté par une précommande (H) , de sorte que le vecteur d'entrée soit donné par :

$$u = Ky + Hz_R \quad (3.2)$$

où z_R désigne l'entrée de référence. Notons (S) le système ayant la même représentation d'état que (S') , mais sans transfert direct (i.e $D = 0$). Si

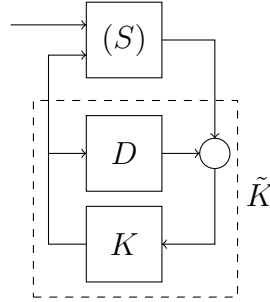


FIGURE 3.1 – Schéma de la boucle fermée avec et sans transfert direct

$D = 0$, $\dot{x} = (A + BKC)x + BH z_R$, et si $D \neq 0$, lorsque $\det(I - KD) \neq 0$, on a $u = K(Cx + Du) + Hz_R$ ou $u = (I - KD)^{-1}KCx + (I - KD)^{-1}Hz_R$,

$$\dot{x} = (A + B(I - KD)^{-1}KC)x + B(I - KD)^{-1}Hz_R \quad (3.3)$$

ou de manière équivalente :

$$\dot{x} = (A + BK(I - DK)^{-1}C)x + B(I - DK)^{-1}Hz_R \quad (3.4)$$

En notant $\tilde{K} = (I - KD)^{-1}K$, on constate que le système (S') ($D \neq 0$) corrigé par le correcteur K est le même que le système (S) rebouclé par le correcteur \tilde{K} . Par conséquent, par la suite, on considérera que le procédé n'a pas de transfert direct (i.e $D = 0$).

Définissons les notations suivantes :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: valeurs propres de la matrice $A + BKC$. Aussi appelés « pôles du système ». (On suppose que les λ_i sont distincts de sorte que la matrice $A + BKC$ est diagonalisable).
- v_1, \dots, v_n : vecteurs propres à droite de la matrice $A + BKC$ associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $(A + BKC)v_i = \lambda_i v_i$. On appellera base modale la base constituée de ces vecteurs.
- w_1, \dots, w_n : directions d'entrée associées aux v_i ; ce sont les vecteurs de \mathbb{C}^m définis par : $w_i = KCv_i$.
- u_1, \dots, u_n : vecteurs propres à gauche de la matrice $A + BKC$ associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $u_i^*(A + BKC) = \lambda_i u_i^*$.
- t_1, \dots, t_n : directions de sorties associées aux u_i ; ce sont les vecteurs de \mathbb{C}^p définis par : $t_i^* = u_i^*BK$.

Par la suite, on analysera les conditions nécessaires au placement des pôles de la boucle fermée (pour un système donné, quelles valeurs propres peut-on placer ? Quelles conditions doivent respecter les matrices pour que le placement de pôle soit possible ?). Soit $q \leq n$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des valeurs propres distinctes. Il est alors possible de définir les matrices suivantes :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_q \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$V = [v_1, \dots, v_q]; \quad W = [w_1, \dots, w_q] \quad (3.6)$$

$$U = [u_1^*, \dots, u_q^*]^T; \quad T = [t_1^*, \dots, t_q^*]^T \quad (3.7)$$

On choisit les vecteurs u_i et v_i normalisés de sorte que :

$$UV = I \quad \text{et} \quad U(A + BKC)V = \Lambda \quad (3.8)$$

Selon (3.6) et (3.7) : $W = KCV$ et $T = UBK$.

Hypothèses :

- On suppose que les q valeurs propres sont toutes distinctes.
- On suppose que s'il existe i_1 tel que λ_{i_1} n'est pas réel, alors il existe i_2 tel que $\lambda_{i_2} = \overline{\lambda_{i_1}}$, $v_{i_2} = \overline{v_{i_1}}$, $w_{i_2} = \overline{w_{i_1}}$, et les matrices U et T telles que $u_{i_2} = \overline{u_{i_1}}$, $t_{i_2} = \overline{t_{i_1}}$.

Définition 20 (Modes) Soit le changement de base

$$\xi = Ux \quad (3.9)$$

avec $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$. Les composantes ξ_i sont appelées « modes ».

3.1.2 La possibilité de placer les valeurs propres

Lemme 2 *Un triplet (v_i, w_i, λ_i) peut être placé par un gain proportionnel en retour de sortie si et seulement si :*

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

Dans ce cas, le triplet peut être placé par tout gain K tel que

$$K(Cv_i + Dw_i) = w_i \quad (3.11)$$

Lemme 3 *Un triplet (u_i, t_i, λ_i) peut être placé par un gain proportionnel en retour de sortie si et seulement si :*

$$\begin{bmatrix} u_i & t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

Dans ce cas, le triplet peut être placé par tout gain K tel que

$$(u_i B + t_i D)K = t_i \quad (3.13)$$

Lorsqu'il s'agit de placer q triplets (v_i, w_i, λ_i) , le système d'équations regroupant q équations (3.11) pour $i \in [1, q]$ devient :

$$W = K(CV + DW) \quad (3.14)$$

De même, pour q triplets (u_i, t_i, λ_i) , on obtient

$$T = (UB + TC)K \quad (3.15)$$

$$AV + BW = V\Lambda \quad (3.16)$$

$$UA + TC = \Lambda U \quad (3.17)$$

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + E'd \\ y = Cx + F'd \\ z = Ex + Fu \end{cases} \quad (3.18)$$

où z désigne une sortie régulée, d une perturbation, et soit x_0 la valeur à $t=0$ du vecteur d'état x .

3.1.3 Analyse des réponses temporelles dans la base modale

On modélise l'effet de l'état initial par une fonction de Dirac, si bien que l'on obtient :

$$\dot{x} = (A + BKC)x + BH z_R + (E' + BKF')d + x_0\delta \quad (3.19)$$

ou encore, on peut écrire :

$$\dot{x} = (A + BKC)x + f \quad (3.20)$$

où $f = BH z_R + (E' + BKF')d + x_0\delta$, c'est à dire que f regroupe toutes les excitations agissant sur la boucle fermée. En changeant de base, on obtient :

$$\dot{\xi} = \Lambda\xi + Uf \quad (3.21)$$

Il s'en suit que :

$$\xi(t) = e^{\Lambda t} * Uf(t) \quad (3.22)$$

où « * » désigne le produit de convolution. Puisque $e^{\Lambda t}$ est une matrice diagonale, on obtient :

$$\xi(t) = e^{\lambda_i t} * u_i f(t) = \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_i f(\tau) d\tau \quad (3.23)$$

En revenant à la base initiale des états (sachant que $V = U^{-1}$, on a $x = V\xi$), on obtient :

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \quad (3.24)$$

Par conséquent, l'influence des différentes excitations sur les états peut être résumé par le graphique de la FIGURE 3.2. Par la suite, nous étudierons

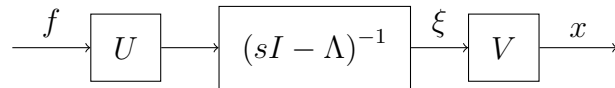


FIGURE 3.2 – Diagramme dans la base modale résumant le transfert de l'excitation (f) vers l'état (x).

plus précisément l'effet des différentes excitations.

Des entrées de références aux sorties régulées

Tout d'abord on examine la réponse de la sortie régulée z par rapport à l'entrée de référence z_R . Les réponses aux conditions initiales et aux perturbations en sont déduites facilement. Pour simplifier les notations, on suppose que $D = 0$. Ici, $f = BH z_R$. On considère la sortie régulée $z = Ex + Fu$. Puisque $x = V\xi$, le terme Ex peut s'écrire $EV\xi$. Le signal de rétroaction peut s'écrire :

$$u = KCV\xi \quad (3.25)$$

et à partir de l'équation (3.14) (cas $D = 0$), :

$$u = W\xi \left(= \sum_{i=1}^n w_i \xi_i \right) \quad (3.26)$$

donc, Fu peut s'écrire $FW\xi$. La transmission des modes est résumée par :

$$z = \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} \xi(t) + \text{transmission directe} \quad (3.27)$$

plus précisément :

$$\xi_i(t) = e^{\lambda_i t} * u_i BH z_R \quad \text{et} \quad z = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \xi_i(t) + \text{t.d.} \quad (3.28)$$

(t.d. : transmission directe). Le terme de transmission directe $BHF z_R$ est négligé, puisqu'il ne concerne pas les modes, ainsi, le transfert de z_R vers les modes (ξ) et des modes vers z peut être illustré par le schéma de la FIGURE 3.3.

Afin d'illustrer les conditions que doivent satisfaire les vecteurs propres

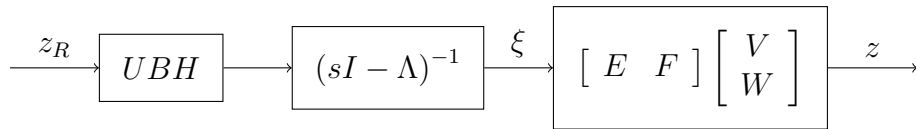


FIGURE 3.3 – Diagramme dans la base modale

pour le découplage, considérons E_k, F_k les k -ième lignes des matrices respectives E et F . z_k et z_{Rk} les k -ième entrées de z et z_R ; H_k la k -ième colonne de la matrice H .

$u_i BH_k = 0 \Rightarrow z_{Rk}$ n'a pas d'effet sur le mode $\xi_i(t)$. $E_k v_i + F_k w_i = 0 \Rightarrow$ le mode $\xi_i(t)$ n'a pas d'effet sur z_k .

Des conditions initiales aux sorties régulées

Dans le cas précédent, l'excitation du système était $f = BH z_R$, ici, cette expression est remplacée par $f = x_0 \delta$. Donc, le résultat est similaire. Après substitution dans l'équation (3.28) :

$$\xi_i(t) = e^{\lambda_i t} * u_i x_0 \delta \quad (3.29)$$

et

$$z = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \xi_i(t) \quad (3.30)$$

ainsi, le transfert entre les conditions initiales et les sorties régulées peut être illustré par la FIGURE 3.4. Les contraintes correspondantes sur les structures

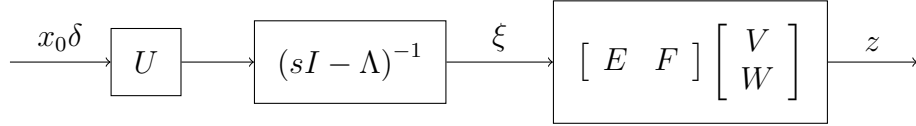


FIGURE 3.4 – Diagramme dans la base modale

propres pour le découplage par rapport aux conditions initiales sont résumés de la manière suivante : $u_i x_0 = 0 \Rightarrow$ la condition initiale n'a pas d'effet sur le mode $\xi_i(t)$. $E_k v_i + F_k w_i = 0 \Rightarrow$ le mode $\xi_i(t)$ n'a pas d'effet sur z_k .

Des perturbations aux sorties régulées

On suppose que $F = 0$ et $F' = 0$ afin d'éviter les transmissions directes. Ici, $f = (E' + BKF')d$, ainsi, après substitution dans l'équation 3.28 :

$$\xi_i(t) = e^{\lambda_i t} * u_i (E' + BKF')d \text{ et } z = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \xi_i(t) \quad (3.31)$$

Mais, $u_i (E' + BKF') = u_i E' + u_i BKF' = u_i E' + t_i F'$, ainsi

$$\xi_i(t) = e^{\lambda_i t} * \begin{bmatrix} u_i & t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E' \\ F' \end{bmatrix} d \quad (3.32)$$

et

$$z = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

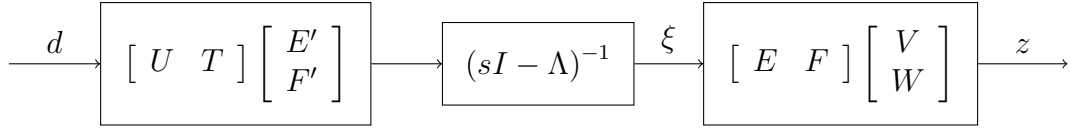


FIGURE 3.5 – Diagramme dans la base modale

Le transfert entre la perturbation d et les sorties régulées est illustré par le schéma de la FIGURE 3.5. Les contraintes correspondantes sur les structures propres pour le découplage vis à vis des perturbations sont les suivantes : $u_i E'_k + t_i F'_k = 0 \Rightarrow d_k$ n'a pas d'effet sur le mode $\xi_i(t)$. $E_k v_i + F_k w_i = 0 \Rightarrow$ le mode $\xi_i(t)$ n'a pas d'effet sur z_k .



FIGURE 3.6 – Diagramme dans la base modale

Exemple

Afin d'illustrer les propriétés de découplage qui peuvent être attendues, considérons le graphe de la FIGURE 3.7.

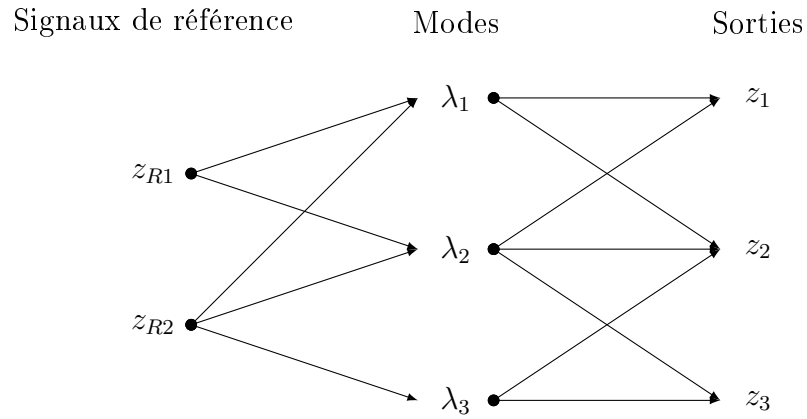


FIGURE 3.7 – Représentation sagittale d'un exemple de découplage entre les entrées et les modes, et entre les modes et les sorties.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} x \quad (3.34)$$

Les propriétés de découplage illustrées par le graphe sont les suivantes :

- le premier mode n'a pas d'effet sur z_3
- le troisième mode n'a pas d'effet sur z_1
- l'entrée de référence z_{R1} n'a pas d'effet sur le troisième mode.

Donc, nous avons les contraintes suivantes :

$$E_3 v_1 = 0 \quad (3.35)$$

$$E_1 v_3 = 0 \quad (3.36)$$

$$u_3 B H_1 = 0 \quad (3.37)$$

Les deux premières équations devraient être considérées comme des contraintes relatives au gain de retour (K), alors que la troisième équation devrait être considérée comme une contrainte relative à la précommande (H).

Résumé des contraintes rencontrées

Les vecteurs propres assignés satisfont l'équation (3.10) (page 67) et les conditions de découplage de la forme $E_0 v_i + F_0 w_i = 0$. Donc, v_i , w_i sont souvent calculés en résolvant l'équation :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \\ E_0 & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

Dans certains cas, chaque ligne de la matrice $\begin{bmatrix} E_0 & F_0 \end{bmatrix}$ a seulement une entrée non nulle, dans ce cas, le découplage consiste à mettre à zéros jusqu'à $m - 1$ entrées de v_i et/ou w_i .

Les contraintes peuvent aussi être « over-specified ». Par exemple, supposons que le système considéré a deux entrées. Donc seulement une entrée des vecteurs propres peut être exactement nulle. Le vecteur propre désiré peut être voulu sous la forme :

$$v_{id} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

où « * » désigne les entrées non-contraintes. Cette spécification peut aussi être écrite comme dans l'équation (3.38)

$$E_0 v_i = 0 \text{ où } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Les vecteurs propres assignés à gauche satisfont l'équation (3.12) (page 67) et les conditions de découplage sont de la forme $u_i E'_0 + t_i F'_0 = 0$. Donc u_i, t_i peuvent être calculés en résolvant :

$$\begin{bmatrix} u_i & t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & E'_0 \\ C & F'_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.41)$$

3.1.4 La synthèse de gains pour la commande modale

Lemme 4 Soit (λ_i, v_i, w_i) un triplet satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} A_0 - \lambda_i I & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.42)$$

est assigné par le gain statique K_0 si et seulement si :

$$K_0(C_0 v_i + D_0 w_i) = w_i \quad (3.43)$$

Dans le cas mono-entrée ($m = 1$), la matrice de la partie gauche dans (3.42) est $n \times (n+1)$, donc les vecteurs v_i et w_i sont uniquement définis (à un scalaire multiplicatif près). Dans le cas multi-entrées, il est nécessaire d'ajouter une contrainte de manière à ce que les vecteurs ci-dessus soient uniquement définis à un scalaire multiplicatif près. Habituellement, ce sont des contraintes de découplages qui sont ajoutées :

$$\begin{bmatrix} E_i & F_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = e_i \quad (3.44)$$

avec $(E_i \in \mathbb{R}^{(m-1) \times n}$ et $F_i \in \mathbb{R}^{(m-1) \times m}$ si $e_i = 0$) ou $(E_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ si $e_i \neq 0$).

3.2 Synthèse d'un gain séquencé sous forme LFT

En Automatique, la synthèse est toujours liée au modèle du procédé dont on dispose. Dans notre cas, elle est étroitement liée à l'étape précédente de

mise sous forme LFT du procédé. En effet, la mise sous forme LFT du procédé résulte initialement d'un choix des paramètres de séquençement. Et si on peut intuitivement penser que plus le nombre de paramètres dont dépend le correcteur est grand, et mieux ce correcteur pourra s'adapter, on comprend aussi très rapidement que se pose le problème de la taille des blocs $\Delta_h(\theta)$ et $\Delta_k(\hat{\theta})$: plus le nombre de paramètres est important, et plus leurs tailles sont importantes. Le nombre de paramètres choisis a donc un impact sur la complexité du correcteur, et donc sur le temps de calcul en ligne. Il faut donc choisir peu de paramètres pour minimiser le temps de calcul, mais suffisamment pour être en mesure de garantir la stabilité de la boucle fermée. Mais dans le cadre de cette thèse, on ne traitera pas du problème du *choix des paramètres*, et on considère que l'on dispose déjà de l'ensemble des paramètres sur lesquels on souhaite séquencé le correcteur.

On peut aussi noter que la synthèse du correcteur peut s'avérer être plus pertinente sur un modèle « pire-cas ». En effet, selon la méthode de synthèse, on peut parfois obtenir de meilleurs résultats en synthétisant le correcteur non pas sur le modèle « nominal » du procédé, mais sur un modèle « pire-cas ».

La problématique du « gain séquencé » consiste à rechercher d'une part une famille de gains satisfaisant des critères de stabilité et de performances pour différents points de fonctionnement du procédé, et d'autre part à trouver une loi de passage d'un gain à un autre, en fonction de paramètres mesurés sur le procédé, tout en garantissant la stabilité de la boucle fermée. Il existe plusieurs approches pour synthétiser un correcteur à gain séquencé, et analyser la boucle fermée dans laquelle il sera implanté. Dans [52] et [69], il est proposé une étude de plusieurs de ces méthodes. Ici, on se contentera juste de présenter très brièvement certaines d'entre elles afin d'être en mesure de réaliser un choix. Parmi les différentes méthodes existantes pour synthétiser un correcteur séquencé, on peut proposer :

- l'interpolation de plusieurs correcteurs ;
- une méthode de synthèse convexe ;
- une méthode LPV utilisant des LMI ;
- une méthode de synthèse de lois modales séquencées.

3.2.1 Interpolation de plusieurs correcteurs

Une première méthode de synthèse de correcteur séquencé qui peut venir à l'esprit, consiste à synthétiser une famille finie de correcteurs à partir d'un ensemble fini de procédés correspondant à autant de valeurs distinctes de paramètres du procédé. Puis, une fois cette famille de correcteurs obtenue, réaliser une interpolation de ces correcteurs par rapport aux paramètres de

séquencement. Bien souvent, ces méthodes supposent une variation lente des paramètres mesurés (dans un sens qui dépend de la méthode employée, par exemple, dans le cas d'un système LPV, cela peut signifier « lent » par rapport à la valeur propre atteignable la plus proche de l'axe des réels dans le plan complexe). Pour cette famille de méthodes, on peut notamment considérer les citations indiquées dans [52, 69].

L'inconvénient de ces méthodes est qu'il est difficile de vérifier que le correcteur résultant de l'interpolation garantit la stabilité pour toutes les valeurs des paramètres. De plus, dans notre cas, il faudrait mettre à nouveau le correcteur sous forme LFT après avoir réalisé l'interpolation.

3.2.2 Méthodes LPV via LMI

Les méthodes LPV permettent de synthétiser des correcteurs LPV en garantissant la stabilité. Pour se faire, ces méthodes prennent en compte les vitesses maximales de variation des paramètres. L'inconvénient de ces méthodes, est qu'elles sont potentiellement conservatives. La source du conservatisme vient du fait que bien souvent, les paramètres et leurs dérivés sont traités comme des variables indépendantes. Pour ces méthodes, on peut se référer par exemple à [74, 3].

3.2.3 Synthèse convexe

Une méthode exposée dans l'article [25] permet de synthétiser un correcteur séquencé à partir d'un procédé sous forme LFT. La synthèse de ce type de correcteur est facilitée par l'utilisation de la boîte à outils « Convex Control Design » (CCD) [24]. Cette méthode se rapproche de la synthèse par interpolation dans le sens où on réalise initialement une synthèse sur un nombre fini de valeur des paramètres. Mais elle en diffère parce que la structure du correcteur est particulière, et elle permet de vérifier la stabilité pour l'ensemble des valeurs fixes des paramètres.

Pour la synthèse convexe, on considère un procédé linéaire sous forme LFT ($H_{LFT}(s) = \mathcal{F}_u(H(s), \Delta)$). On suppose que $\Delta \in \underline{\mathbf{B}^\circ \Delta}$ où $\underline{\mathbf{B}^\circ \Delta} = \{\Delta = \text{diag}(\delta_k I_{q_k}) | \overline{\sigma}(\Delta) < 1\}$ est un ensemble borné.

$$(H(s)) \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 d + B_3 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} d + D_{13} u \\ p &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} d + D_{23} u \\ y &= C_3 x + D_{31} w + D_{32} d \end{cases} \quad (3.45)$$

On cherche alors à synthétiser un correcteur sous la forme $K_T(s, \Delta) = \mathcal{F}_u(K_{LFT}(s), Q(s, \Delta))$, où $Q(s, \Delta)$ est un paramètre de Youla, et on pose

$K_{LFT}(s) = \mathcal{F}_u(K(s), \Delta)$ avec $K(s)$ défini par :

$$(K(s)) \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_1\hat{w} + B_3u + Le \\ \hat{z} &= C_1\hat{x} + D_{11}\hat{w} + D_{13}u \\ u &= -K\hat{x} + v \\ e &= y - C_3\hat{x} - D_{31}\hat{w} \end{cases} \quad (3.46)$$

En posant $v = Q(s, \Delta)e$, la boucle fermée peut être représentée par la FIGURE 3.8, où le paramètre de Youla n'apparaît pas. Cette boucle fermée peut être

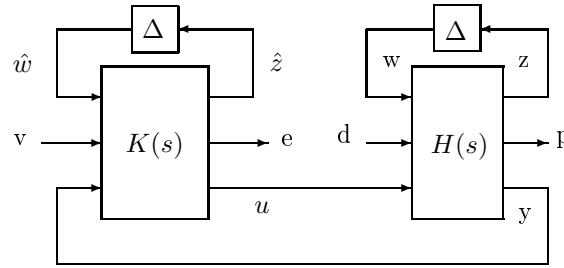


FIGURE 3.8 – Boucle fermée pour la synthèse convexe.

représentée en mettant en exergue les éléments que l'on cherche à synthétiser, en développant la structure du correcteur sur la FIGURE 3.9 (les dépendances de K , L et Q par rapport à la variable Δ et celle de Q par rapport à s ne sont pas indiquées pour ne pas surcharger la figure).

La synthèse se déroule alors en deux étapes :

1. Synthèse de $K(s)$: Il s'agit alors de synthétiser un gain à retour d'état $K(\Delta)$ et un gain d'observation $L(\Delta)$, avec un objectif de placement de pôles dans une région LMI. Pour cela, on considère que l'on dispose d'une base polynomiale de dimension finie $(p_j)_{j \in [1, n]}$, et que l'on peut écrire par exemple $K(\Delta) = \sum_{j=1}^n p_j(\Delta) K_j$. Les coefficients K_j sont alors calculés à l'aide d'une optimisation sous contraintes LMI. On procède de manière analogue pour $L(\Delta)$.
2. Synthèse de $Q(s, \Delta)$: De même, $Q(s, \Delta)$ est décomposé dans une base $(p_j)_{j \in [1, n]}$, $Q(s, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_{Qd}} q_j(\Delta) Q_j(s)$, $Q_j(s)$ est décomposé dans une base $(F_k)_{k \in [1, m]}$, $Q_j(s) = \sum_{k=1}^{n_{Qp}} \alpha_{k,j} F_k(s)$.

Dans notre cas, le problème est que l'on considère un estimateur discret, et le correcteur synthétisé est continu, de même que le procédé considéré. Une première possibilité, est de réaliser une transformation bilinéaire du procédé continu pour obtenir un procédé discret, et sur cette base, synthétiser un correcteur discret. Ainsi, tous les éléments seraient discrets, et cela rendrait

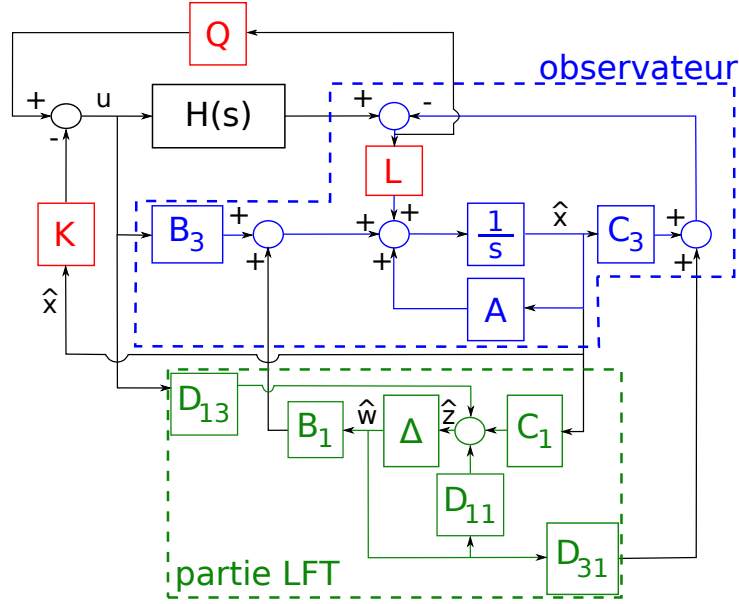


FIGURE 3.9 – Représentation graphique de la boucle fermée, mettant en exergue les éléments que l'on cherche à synthétiser dans la synthèse convexe.

l'estimation plus facile (par moindres carrés récursif). Cependant cette méthode présente la difficulté suivante : la transformation bilinéaire d'un procédé continu strictement propre génère (très souvent) un procédé discret avec un transfert direct non nul. Or la synthèse convexe nécessite de considérer un procédé strictement propre.

3.2.4 La synthèse de gains pour la commande modale séquencée

On utilise un algorithme de synthèse de correcteur auto-séquenté extrait de [55]. Il s'agit de l'application de la méthode présentée dans la partie 3.1 (page 64) aux LFTs.

Proposition 6 (Algorithme de placement de modes) Soit $(A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta))$ une représentation d'état d'un système, avec n_s états et r_y sorties. Si le nombre de mesures (r_y) est supérieur ou égal au nombre de pôles dominants (r_d), on peut proposer l'algorithme suivant :

1. Choisir r_d valeurs propres $\lambda_i(\theta)$ de la boucle fermée.

2. Calculer r_d paires $(v_i(\theta), w_i(\theta))$ en résolvant l'équation :

$$\begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.47)$$

3. Calculer $K(\theta)$ solution de l'équation :

$$K(\theta) \begin{bmatrix} C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(\theta) \\ W(\theta) \end{bmatrix} = W(\theta) \quad (3.48)$$

avec $W(\theta) = [w_1(\theta), \dots, w_{r_d}(\theta)]$ et $V(\theta) = [v_1, \dots, v_{r_d}(\theta)]$

Dans cet algorithme, $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$, $D(\theta)$, $K(\theta)$ et $\lambda_i(\theta)$ sont sous forme LFT.

L'équation matricielle (3.47), représente un système d'équations avec $(n_s + m)$ inconnus et (n_s) équations. Plusieurs solutions sont donc possibles. On présentera par la suite différentes solutions proposées par [54].

Réalisations pratiques des algorithmes.

Le cas d'une seule entrée

Proposition 7 (Algorithme de placement de modes) (dans le cas d'une seule entrée) Soit $(A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta))$ une représentation d'état d'un système, avec n_s états et r_y sorties. Si le nombre de mesures (r_y) est supérieur ou égal au nombre de pôles dominants (r_d), on peut proposer l'algorithme suivant :

1. Choisir r_d valeurs propres $\lambda_i(\theta)$ de la boucle fermée.
2. Calculer r_d paires $(v_i(\theta), w_i(\theta))$ en calculant :

$$\begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \\ 0_{1,n_s} & 1 \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} 0_{n_s,1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

3. Calculer $K(\theta)$ par la formule :

$$K(\theta) = W(\theta)\Upsilon(\theta)^\dagger \quad (3.50)$$

$$\Upsilon(\theta)^\dagger = [\Upsilon(0)^*\Upsilon(\theta)]^{(-1)} \Upsilon(0)^* \quad (3.51)$$

$$\Upsilon(\theta) = C(\theta)V(\theta) + D(\theta)W(\theta) \quad (3.52)$$

avec $W(\theta) = [w_1(\theta), \dots, w_{r_d}(\theta)]$ et $V(\theta) = [v_1(\theta), \dots, v_{r_d}(\theta)]$

Dans cet algorithme, $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$, $D(\theta)$, $K(\theta)$ et $\lambda_i(\theta)$ sont sous forme LFT.

Le cas général Pour résoudre l'équation (3.47), différentes méthodes sont proposées par [54].

option w (choix des directions des m entrées).

$$\begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \\ 0_{m,n_s} & I_m \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} 0_{n_s,1} \\ d_i \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

où d_i est un vecteur colonne de m lignes, correspondant aux directions d'entrées choisies.

option p (pour une « projection » à partir des structures propres déjà assignées par un correcteur à retour de sortie donné.) Soit $(A_{k_0}, B_{k_0}, C_{k_0}, D_{k_0})$, un correcteur à retour de sortie donné. On note :

$$A_p = \begin{bmatrix} A(0) & 0 \\ B_{k_0}C(0) & A_{k_0} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} B(0) \\ B_{k_0}D(0) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} D_{k_0}C(0) & C_{k_0} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$D_p = D_{k_0}D(0) \quad (3.57)$$

$$A_{cl} = A_p + B_p(I - D_p)^{-1}C_p$$

$$[V_v, V_p] = eig [A_p + B_p(I - D_p)^{-1}C_p] \quad (3.58)$$

V_p : matrice des valeurs propres.

V_v : matrice des vecteurs propres.

$$W_d = (I - D_p)^{(-1)}C_pV_v \quad (3.59)$$

En notant $j = \arg \min |\lambda_i(0)I - V_p|$ ($(V_p)_{j,j}$ est la valeur propre la plus proche de $\lambda_i(0)$).

$$\begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \\ 0_{m,n_s} & I_m \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} 0_{n_s,1} \\ (W_d)_j \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

avec $(W_d)_j$ la j -ème colonne de W_d .

option n (pour calculer des vecteurs propres dans le noyau ou satisfaisant

l'équation : $\begin{bmatrix} cc & dd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = ee$)

$$\begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \\ C_{c_i}(\theta) & D_{d_i}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n_s,1} \\ G_{g_i}(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$Q = null \left(\begin{bmatrix} A(0) - \lambda_i(0)I_{n_s} & B(0) \\ C_{c_i}(0) & D_{d_i}(0) \end{bmatrix} \right) \quad (3.62)$$

$$\begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \\ E_i & F_i \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} 0_{n_s,1} \\ \frac{G_{g_i}(\theta)}{G_{cg_i}} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Soit nQ_2 le nombre de colonne de Q . Si $\|G_{g_i}(\theta)\| = 0$, alors $G_{cg_i}(\theta) = 1_{nQ_2,1}$, sinon, $G_{cg_i}(\theta) = 0_{nQ_2,1}$.

option z (pour découpler avec les entrées mises à zéro.)

la matrice $\begin{bmatrix} E_i & F_i \end{bmatrix}$ ne doit pas avoir plus de $(m-1)$ ligne. Chaque ligne de $\begin{bmatrix} E_i & F_i \end{bmatrix}$ n'a qu'une seule valeur non nulle qui est égale à 1.

$$\begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \\ E_i & F_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.64)$$

$$Q = null \left(\begin{bmatrix} A(0) - \lambda_i(0)I_{n_s} & B(0) \\ E_i & F_i \end{bmatrix} \right) \quad (3.65)$$

$$X = \begin{bmatrix} A(\theta) - \lambda_i(\theta)I_{n_s} & B(\theta) \\ E_i & F_i \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

On prend pour $\begin{bmatrix} v_i(\theta) \\ w_i(\theta) \end{bmatrix}$ la première colonne de X .

3.2.5 Bien posé du résultat dans le cas d'un gain statique et d'incertitudes constantes

Dans le cas où le résultat de la synthèse est un gain statique sous forme LFT : $K(\theta) = \mathcal{F}_u(K_{aug}, \Delta_k(\theta))$, avec $K_{aug} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{11} & K_{12} \end{pmatrix}$. On a alors

$$K(\theta) = K_{22} + K_{21}\Delta_k(\theta)(I - K_{11}\Delta_k(\theta))^{-1}K_{12} \quad (3.67)$$

Notons

$$B_{\delta o} = \{\Delta_k(\theta) | \forall i \in [1, n], \theta_i \in [-1, 1]\} \quad (3.68)$$

Le gain LFT est dit bien posé si et seulement si $\forall \Delta_k(\theta) \in B_{\delta o}$, $\det(I - K_{11}\Delta_k(\theta)) \neq 0$. Afin de vérifier le bien posé, on utilise la valeur singulière structurée (cf. page 42 et [23]). Le bien posé de $K(\theta)$ peut être examiné grâce à la proposition suivante.

Proposition 8 $\mathcal{F}_u(K_{aug}(s), \Delta_k(\theta))$ est bien posé pour tout $\Delta_k(\theta) \in B_{\delta 0}$ si et seulement si $\mu(K_{11}) < 1$. Une condition suffisante est qu'il existe des matrices de mise à l'échelle $D_0 = D_0^* > 0$ et $G_0 = G_0^*$, avec $D_0 \Delta_k(\theta) = \Delta_k(\theta) D_0$ et $G_0 \Delta_k(\theta) = \Delta_k(\theta)^* G_0$ tels que

$$K_{11} D_0 K_{11}^* + j(G_0 K_{11}^* - K_{11} G_0) \leq D_0 \quad (3.69)$$

La condition (3.69) peut être vérifiée avec des routines standards de Matlab, voir aussi [30].

Chapitre 4

Quelques éléments sur deux méthodes d'estimation paramétrique

L'objectif de ce chapitre est de faire un rappel de quelques éléments sur l'identification (ou estimation) paramétrique. Dans cette partie, on s'attache à présenter deux méthodes d'estimation couramment utilisées en commande adaptative qui sont :

- l'estimation des *moindres carrés*,
- et l'estimation à *erreur bornée*.

4.1 Présentation

Dans ce chapitre, on se place dans la situation où l'on dispose d'un procédé qui est soumis à des signaux d'entrée connus, et où l'on mesure ses signaux de sortie. L'identification (ou estimation de paramètres) consiste, à partir de ces signaux (« observations »), à déterminer les paramètres d'un « modèle » a priori du procédé. Pour ce faire, il existe différentes « méthodes d'identification » qui sont fonction des « observations », du « modèle » considéré et de l'objectif dans lequel cette identification est réalisée.

4.1.1 Les observations

Généralement, on considère qu'un modèle peut être caractérisé par six types de variables : les variables de décision, les variables d'entrée, les variables d'état, les variables exogènes, les variables aléatoires, et les variables de sortie. Ici, on considère que l'on ne dispose que des variables d'entrée et de

sortie du procédé. La distinction entre variable d'entrée et variable exogène étant fonction du point de vue.

Les caractéristiques des mesures (signaux de sortie) sont d'une grande importance. Dans le cadre de l'identification avec un estimateur discret, la *période d'échantillonnage* doit être choisie en adéquation avec le modèle que l'on souhaite identifier. Notamment, elle ne doit pas être trop grande afin d'éviter le risque d'un sous échantillonnage. Mais d'un autre côté une période très petite signifie beaucoup plus de points de calcul et peut poser des problèmes numériques, et dans le cadre d'une estimation en ligne, cette période peut être limitée par la rapidité des calculateurs utilisés. De plus, il faut aussi veiller à ce que le *rapport signal sur bruit* ne compromette pas les possibilités d'identification.

De même, les signaux d'entrée ont eux aussi un rôle important dans l'identification. En effet, ils doivent *rester dans les limites du modèle*. Dans le cas par exemple d'un système non-linéaire, le modèle considéré peut n'être valable que pour des entrées déterminées. De plus, il faut aussi garantir une *richesse* suffisante du signal. Intuitivement, cela signifie qu'il faut que le signal d'entrée puisse générer à travers le procédé que l'on cherche à identifier des sorties permettant de discriminer le modèle le plus proche du procédé dans la famille des modèles considérée. Afin de quantifier cette propriété intuitive, on définit, dans le cas de l'identification des systèmes linéaires, un signal d'« excitation persistante ».

Excitation persistante

Ici, on ne considère que le cas d'un signal d'entrée échantillonné, ou discret.

Définition 21 (Signal d'excitation persistante) *On dit que $u(t)$ est un signal d'excitation persistante d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ si pour tous les polynômes $L(q^{-1}) \neq 0$ d'ordre inférieur ou égal à $(n - 1)$,*

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t_1} \sum_{t=1}^{t_1} [L(q^{-1})u(t)]^2 \right) > 0 \quad (4.1)$$

Remarques sur la définition :

- Tout d'abord, on peut constater, en notant pour tout $t \in \mathbb{N}$, $y(t) = L(q^{-1})u(t)$, que la quantité considérée pour la définition correspond au carré de la « valeur efficace » (parfois appelée aussi puissance) du signal y . On peut remarquer qu'une condition nécessaire pour que la condition de non nullité soit respectée, est qu'il faut que y ne soit pas à support borné (i.e. $\forall t \in \mathbb{N}, \exists t_1 > t$ tel que $y(t_1) \neq 0$). En effet, tous signaux à

support borné ($\exists t_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall t > t_1, u(t) = 0$) à une valeur efficace nulle. On en déduit alors qu'il en est de même pour u . En effet, pour que $y(t_1) \neq 0$, il faut que $\exists t_2 \in [t_1 - n + 1, t_1] \cap \mathbb{N}$ tel que $u(t_2) \neq 0$. En d'autres termes, aussi loin que l'on aille dans le temps, on trouvera toujours une date t pour laquelle $u(t) \neq 0$. Cette propriété explique la dénomination de « persistant » pour de tels signaux.

- D'autre part, on peut aussi noter que si $y = L(q^{-1})u$ avec u un signal d'excitation persistante d'ordre n , alors il existe un unique polynôme $L(q^{-1})$ d'ordre inférieur ou égal à $(n - 1)$ pour lequel on a $y = L(q^{-1})u$. En effet, pour s'en convaincre, raisonnons par l'absurde, et considérons qu'il existe deux polynômes $L_1(q^{-1}) \neq L_2(q^{-1})$ d'ordre inférieur ou égal à $(n - 1)$, pour lesquels on a $y = L_1(q^{-1})u = L_2(q^{-1})u$. On a alors $L_d(q^{-1}) = L_1(q^{-1}) - L_2(q^{-1})$ qui est non nul et d'ordre inférieur ou égal à $(n - 1)$, donc nécessairement $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t_1} \sum_{t=1}^{t_1} [L_d(q^{-1})u(t)]^2 \right) > 0$, alors que $\forall t \in \mathbb{N}, L_1(q^{-1})u(t) - L_2(q^{-1})u(t) = 0$, ce qui constitue une contradiction. Cette propriété a donc tout son intérêt dans le cadre d'une identification d'un système linéaire, car à partir de la sortie y mesurée, un tel signal permet de discriminer le polynôme que l'on cherche à identifier parmi tous les autres polynômes d'ordre inférieur ou égal à $(n - 1)$.

On peut aussi proposer une autre définition équivalente. Soit donc $L(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i q^{-i}$ un polynôme non nul quelconque, appartenant à l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $(n - 1)$. Pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$L(q^{-1})u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u(t - i) \quad (4.2)$$

En notant $U_n(t) = [u(t), \dots, u(t - n + 1)]^T$, et $P = [a_0, \dots, a_{n-1}]$, on a : $L(q^{-1})u(t) = P U_n(t)$. De plus, on a

$$\sum_{t=1}^{t_1} [L(q^{-1})u(t)]^2 = \sum_{t=1}^{t_1} [P U_n(t) U_n^T(t) P^T] \quad (4.3)$$

D'où la définition équivalente de l'excitation persistante :

Définition 22 *Un signal $u(t)$ est dit d'excitation persistante d'ordre n , si*

$$R_{uu} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t_1} \sum_{t=1}^{t_1} [U_n(t) U_n^T(t)] \right) > 0 \quad (4.4)$$

avec $U_n(t) = [u(t), \dots, u(t - n + 1)]^T$. (On adopte la notation R_{uu} , car si le signal est stationnaire, il s'agit alors de la matrice d'autocorrélation d'ordre n du signal u .)

De plus selon [51] (page 28), on a

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1} \sum_{t=1}^{t_1} [L(q^{-1})u(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |L(e^{j\omega})|^2 \phi_u(\omega) d\omega > 0 \quad (4.5)$$

où $\phi_u(\omega)$ est la densité spectrale du signal d'excitation. Cette égalité permet de donner une interprétation fréquentielle, qui est que si $\phi_u(\omega)$ ne s'annule pas pour au moins n point(s) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, alors $u(t)$ est un signal d'excitation persistante d'ordre n .

4.1.2 Le modèle

Il existe différents types de modélisation (modélisation statistique, modélisation par équation différentielle, modélisation par la théorie des jeux, modélisation par réseau de Pétri, ...). Dans le présent document, on ne s'occupera que des modélisations de systèmes dynamiques discrets linéaires par des équations aux différences.

De plus, après avoir choisi un type de modélisation, il convient aussi de choisir comment sont introduits les signaux d'entrée, et les perturbations. Il existe différents modèles pour les représenter. Adoptons les notations suivantes :

- $e(n)$ est un bruit blanc ;
- $y(n)$ est le signal mesuré ;
- $u(n)$ est un signal d'entrée (ou signal exogène) ;
- $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$, $F(z)$ sont des polynômes en z^{-1} .

Définition 23 (Bruit blanc) $e(n)$ est un bruit blanc, si :

- $E[e] = 0$;
- $E[e(n)^2] = \sigma \in \mathbb{R}$;
- $E[e(n)e(n - \tau)] = 0$, $\forall \tau \neq 0$.

On peut citer les modèles suivants :

- le modèle MA (ou à Moyenne Ajustée) : dans le modèle MA, on considère que l'entrée est un bruit blanc, et on recherche $C(z)$, un polynôme en z^{-1} . (cf. FIGURE 4.1).
- le modèle AR (AutoRégressif) (cf. FIGURE 4.2)
- le modèle ARMA (cf. FIGURE 4.3)

- le modèle ARMAX : pour le modèle ARMAX, il est ajouté une entrée déterministe (indiqué par la lettre X d'« eXogène »). (cf. FIGURE 4.4). Ce modèle est aussi parfois appelé modèle à « erreur d'équation », mais bien souvent alors on considère que $C(z) = 1$.
- le modèle général (cf. FIGURE 4.5)
- le modèle à erreur de sortie (cf. FIGURE 4.6)

$$e(n) \rightarrow \boxed{C'(z)} \rightarrow y(n)$$

FIGURE 4.1 – Modèle MA

$$e(n) \rightarrow \boxed{\frac{1}{A(z)}} \rightarrow y(n)$$

FIGURE 4.2 – Modèle AR

$$e(n) \rightarrow \boxed{\frac{C(z)}{A(z)}} \rightarrow y(n)$$

FIGURE 4.3 – Modèle ARMA

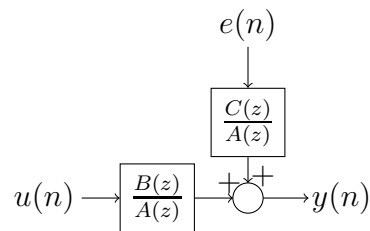


FIGURE 4.4 – Modèle ARMAX

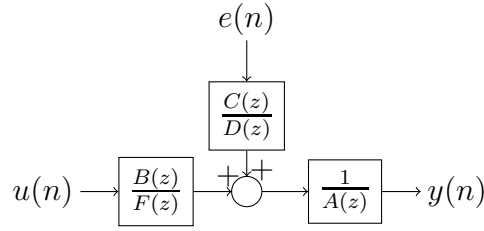


FIGURE 4.5 – Modèle général

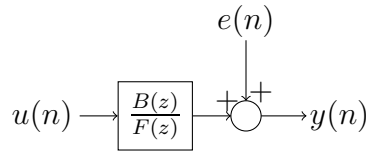


FIGURE 4.6 – Modèle à erreur de sortie

Pour la suite, on supposera que l'on dispose d'un système réel que l'on peut représenter par un modèle linéaire défini par :

$$\forall t \in \mathbb{N}, y(t) = \theta^T \phi(t-1) \quad (4.6)$$

où $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ représente le vecteur de paramètres que l'on cherche à estimer, et $\phi(\cdot) \in (\mathbb{R}^{n_\theta})^{\mathbb{N}}$ et $y(\cdot) \in (\mathbb{R}^{n_y})^{\mathbb{N}}$ sont des grandeurs que l'on peut mesurer, et qui sont potentiellement bruitées (selon les hypothèses qui seront choisies). y constitue la sortie mesurée du système, et ϕ est appelé *régresseur*.

Le modèle permet donc de définir une *valeur prédite* fonction de θ et de ϕ :

$$\hat{y}(t|\theta) = \theta^T \phi(t-1) \quad (4.7)$$

Cependant, puisque le paramètre θ est supposé inconnu, on ne dispose que de la *sortie prédite* :

$$\hat{y}(t|\hat{\theta}) = \hat{\theta}^T \phi(t-1) \quad (4.8)$$

L'*erreur de prédiction* est définie par :

$$\epsilon(t, \hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t|\hat{\theta}) \quad (4.9)$$

4.2 Caractérisation des estimateurs

Dans ce qui suit, on cherche à caractériser la « qualité » de l'estimation fournie. C'est à dire que l'on va chercher à caractériser l'erreur entre la valeur

vraie de θ , et son estimation $\hat{\theta}$ en fonction du nombre d'observations (c'est à dire l'instant N) et des hypothèses faites sur le modèle (présence de bruit, type de bruit, etc). En considérant que $\hat{\theta}(\cdot)$ est alors un processus aléatoire, on peut définir les quantités suivantes.

Définition 24 (Biais d'une estimation) *On définit à l'instant N le biais $\mathcal{B}(N)$ de l'estimation $\hat{\theta}(N)$ par*

$$\mathcal{B}(N) = E \left[\hat{\theta}(N) \right] - \theta \quad (4.10)$$

Définition 25 (Biais asymptotique) *Si $\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\hat{\theta}(N) \right] \neq \theta$, alors $\hat{\theta}(\cdot)$ est un estimateur asymptotique biaisé.*

Dans le cas contraire, lorsque $\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\hat{\theta}(N) \right] = \theta$, on dit alors que $\hat{\theta}(\cdot)$ est un estimateur asymptotique non biaisé

De même, on peut aussi chercher à caractériser la variance de $\hat{\theta}(N)$. Mais on peut aussi s'intéresser à la *consistance* de l'estimation.

Définition 26 *L'estimateur $\hat{\theta}(\cdot)$ est dit consistant si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P \left[\left\| \hat{\theta}(N) - \theta \right\| < \varepsilon \right] = 1 \quad (4.11)$$

4.3 La méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés a été élaborée indépendamment par Legendre (1805) et Gauss (1809) (« Théorie du mouvement des corps célestes parcourant des sections coniques autour du soleil » (dans le livre 2)), et l'algorithme des moindres carrés récursif étant basé sur une formule d'inversion matricielle du début du vingtième siècle, serait apparu dans les années 50.

4.3.1 Présentation de la méthode

La méthode des « moindres carré » est basée sur la considération du « critère d'erreur » suivant :

$$J_N(\hat{\theta}, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t|\hat{\theta}) \quad (4.12)$$

que l'on peut aussi généraliser via l'expression :

$$J_N(\hat{\theta}, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \nu^2(t|\hat{\theta}) \quad (4.13)$$

avec

$$\nu(t, \hat{\theta}) = L(q^{-1})\epsilon(t, \hat{\theta}) \quad (4.14)$$

où $L(q^{-1})$ est un filtre linéaire. Alors la valeur identifiée de θ via la méthode des moindres carré est la valeur de $\hat{\theta}$ qui minimise le critère $J_N(\theta, z^N)$. C'est à dire :

$$\hat{\theta}_N^* = \arg \min_{\hat{\theta}} J_N(\hat{\theta}, z^N) \quad (4.15)$$

Cacul de $\hat{\theta}_N^*$

$J_N(\hat{\theta}, z^N)$ s'exprime de la manière suivante :

$$J_N(\hat{\theta}, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[y(t) - \hat{\theta}^T \phi(t-1) \right]^2 \quad (4.16)$$

$J_N(\cdot, z^N)$ étant \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{n_θ} (ensemble ouvert), une condition nécessaire sur $\hat{\theta}_N^*$ est que

$$\frac{\partial J_N}{\partial \hat{\theta}}(\hat{\theta}_N^*) = 0 \quad (4.17)$$

On cherche donc l'ensemble des valeurs $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ telles que :

$$\frac{\partial J_N(\hat{\theta}, z^N)}{\partial \hat{\theta}} = 2 \frac{1}{N} \left[\sum_{t=1}^N y(t) - \hat{\theta}^T(N) \phi(t-1) \right] \phi(t-1) = 0 \quad (4.18)$$

On en déduit alors que si $\left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1) \phi^T(t-1) \right]$ est inversible, alors la solution à l'équation (4.18) est unique, et on obtient alors :

$$\hat{\theta}_N^* = F(N) \sum_{t=1}^N y(t) \phi(t-1) \quad (4.19)$$

avec

$$F(N) = \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1) \phi^T(t-1) \right]^{-1} \quad (4.20)$$

De manière équivalente, en notant :

$$Y(N) = \begin{bmatrix} y(N) \\ \vdots \\ y(1) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi(N-1) = \begin{bmatrix} \phi^T(N-1) \\ \vdots \\ \phi^T(0) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

on a :

$$\epsilon(N) = \begin{bmatrix} \epsilon(N) \\ \vdots \\ \epsilon(1) \end{bmatrix} = Y(N) - \Phi(N-1)\hat{\theta}(N) \quad (4.22)$$

et le critère des moindres carrés s'écrit alors :

$$J_N = \frac{1}{N} \epsilon^T(N) \epsilon(N) \quad (4.23)$$

Et la condition d'annulation du gradient conduit à :

$$\Phi^T(N-1) [Y(N) - \Phi(N-1)\hat{\theta}(N)] = 0 \quad (4.24)$$

d'où :

$$\hat{\theta}_N^* = [\Phi^T(N-1)\Phi(N-1)]^{-1} \Phi^T(N-1)Y(N) \quad (4.25)$$

On peut aussi noter que

$$(\Phi(N-1))^\dagger = [\Phi^T(N-1)\Phi(N-1)]^{-1} \Phi^T(N-1) \quad (4.26)$$

est la « pseudo-inverse » de la matrice $\Phi(N-1)$.

4.3.2 Effet du bruit

Analysons maintenant l'effet du bruit $w(t)$. On suppose que le bruit intervient uniquement sur y , de sorte que l'on puisse écrire :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad y(t) = \theta^T \phi(t-1) + w(t) \quad (4.27)$$

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}_N^* + \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi^T(t-1) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)w(t) \right] \quad (4.28)$$

Calcul du biais

$$E [\hat{\theta}(N)] = \hat{\theta}_N^* + E [\Psi(\phi, w, N)] \quad (4.29)$$

avec

$$\Psi(\phi, w, N) = \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi^T(t-1) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)w(t) \right] \quad (4.30)$$

Compte tenu des hypothèses faites plus haut, seul $w(\cdot)$ est un processus aléatoire, et $\phi(\cdot)$ est un processus déterministe. Par conséquent, on peut écrire :

$$E[\Psi(\phi, w, N)] = \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi^T(t-1) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)E[w(t)] \right] \quad (4.31)$$

On en déduit donc qu'une condition suffisante pour que l'estimateur soit non biaisé est que $\forall t \in \mathbb{N}$, $E[w(t)] = 0$ (w est un bruit de moyenne nulle). On peut toutefois noter que si $\phi(\cdot)$ est lui aussi un processus aléatoire, alors la conclusion précédente reste valable si $\phi(\cdot)$ et $w(\cdot)$ ne sont pas corrélés.

4.3.3 Comportement asymptotique

L'expression (4.28) peut aussi s'écrire :

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}_N^* + \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi^T(t-1) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t-1)w(t) \right] \quad (4.32)$$

Définition 27 (Convergence au sens des moindres carrés) Soit $X(\cdot)$ un processus aléatoire. On dira que $X(\cdot)$ converge en l'infini vers l au sens des moindres carrés si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[|X(N) - l|^2] = 0 \quad (4.33)$$

on écrira alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{mmc} X(N) = l \quad (4.34)$$

Définition 28 (Ergodicité au sens de la moyenne) Soit $X(\cdot)$ un processus aléatoire, et notons $Y(\cdot)$ sa moyenne ($\forall t \in \mathbb{N}$ et $t \neq 0$, $Y(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t X(k)$). Ici, nous dirons que $X(\cdot)$ est un processus ergodique au sens de la moyenne si et seulement si $E[X(\cdot)]$ est constant et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|Y(n) - E[X(\cdot)]|^2] = 0 \quad (4.35)$$

(il s'agit d'une convergence au sens des moindres carrés)

Si les processus $t \mapsto \phi(t-1)w(t)$ et $t \mapsto \phi(t-1)\phi^T(t-1)$ sont ergodiques (au sens de la moyenne), alors $t \mapsto E[\phi(t-1)\phi^T(t-1)]$ et $t \mapsto E[\phi(t-1)w(t)]$ sont constants, et en notant $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E[\phi(t)\phi^T(t)] = E_0(\phi\phi^T) \quad (4.36)$$

et

$$E[\phi(t-1)w(t)] = E_{(-1)}(\phi w) \quad (4.37)$$

on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{mmc} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi^T(t-1) = E_0(\phi\phi^T) \quad (4.38)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{mmc} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t-1)w(t) = E_{(-1)}(\phi w) \quad (4.39)$$

D'où

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{mmc} \hat{\theta}(N) = \hat{\theta}_N^* + (E_0(\phi\phi^T))^{-1} (E_{(-1)}(\phi w)) \quad (4.40)$$

La convergence au sens des moindres carrés impliquant la convergence en probabilité, on peut alors proposer des conditions suffisantes (en plus de l'hypothèse d'ergodicité) pour garantir la consistance de l'estimateur. Les conditions sont les suivantes :

1. $E_0(\phi\phi^T)$ est inversible
2. $E_{(-1)}(\phi w) = 0$

Pour rester cohérent avec les hypothèses faites jusque là, on considérera que la première condition est respectée. En effet, on a déjà supposé qu'à chaque instant $\sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi^T(t-1)$ est inversible. Cette hypothèse sera néanmoins discutée par la suite.

Pour respecter la deuxième condition, on peut constater qu'il s'agit d'une fonction d'intercorrélation entre $\phi(\cdot)$ et $w(\cdot)$. Une condition suffisante est donc d'imposer que $w(\cdot)$ soit indépendant de $\phi(\cdot)$ et de moyenne nulle. Un cas particulier est de prendre $w(\cdot)$ comme étant un bruit blanc, et s'assurer ainsi de la non corrélation.

4.3.4 Moindres carrés récurrents

Dans le cadre de l'utilisation des moindres carrés pour des applications en temps réel, il est souvent préférable d'utiliser une version récursive. Pour établir la formulation de l'algorithme récursif, on se place à nouveau dans le cas idéal sans bruit. On retrouve donc à nouveau l'équation (4.19), qui peut être réécrite sous la forme suivante

$$\hat{\theta}(t) = F(t) \sum_{i=1}^t y(i)\phi(i-1) \quad (4.41)$$

avec

$$F^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \phi(i-1)\phi^T(i-1) \quad (4.42)$$

On cherche alors à exprimer $\hat{\theta}(t+1)$ à l'aide de $\hat{\theta}(t)$, afin d'obtenir une expression de la forme suivante

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta\hat{\theta}(t+1) \quad (4.43)$$

Par la suite, on cherchera donc à exprimer $\Delta\hat{\theta}(t+1)$ en fonction (si possible) des « nouvelles informations ». C'est à dire en fonction de $y(t+1)$ et $\phi(t)$. On obtient :

$$\Delta\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t) \quad (4.44)$$

$$= F(t+1)\alpha(t+1) - F(t)\alpha(t) \quad (4.45)$$

avec

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^t y(i)\phi(i-1) \quad (4.46)$$

On remarque déjà que

$$F^{-1}(t+1) = \sum_{i=1}^{t+1} \phi(i-1)\phi^T(i-1) = F^{-1}(t) + \phi(t)\phi^T(t) \quad (4.47)$$

Cette dernière expression nous indique alors qu'il serait préférable afin de faciliter les calculs de s'intéresser à $F^{-1}(t+1)\Delta\hat{\theta}(t+1)$ plutôt que simplement $\Delta\hat{\theta}(t+1)$. On obtient alors :

$$F^{-1}(t+1)\Delta\hat{\theta}(t+1) = [I - F^{-1}(t+1)F(t)]\alpha(t) + y(t+1)\phi(t) \quad (4.48)$$

Et de l'équation (4.47), on déduit :

$$F^{-1}(t+1)F(t) = I + \phi(t)\phi^T(t)F(t) \quad (4.49)$$

d'où (en reprenant (4.48)) :

$$F^{-1}(t+1)\Delta\hat{\theta}(t+1) = y(t+1)\phi(t) - \phi(t)\phi^T(t)F(t)\alpha(t) \quad (4.50)$$

$$= [y(t+1) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t)]\phi(t) \quad (4.51)$$

Ce qui nous conduit finalement à :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)\phi(t)\epsilon^0(t+1) \quad (4.52)$$

où

$$\epsilon^0(t+1) = \epsilon(t+1|\hat{\theta}(t)) = y(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t) \quad (4.53)$$

est l'erreur de prédiction a priori.

Lemme 5 Soit $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice régulière, et $\phi \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Alors :

$$(F^{-1} + \phi\phi^T)^{-1} = F - \frac{F\phi\phi^T F}{1 + \phi^T F \phi} \quad (4.54)$$

De ce dernier lemme, on en déduit que

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (4.55)$$

Finalement on obtient l'*Algorithme des moindres carrés récursif* (avec erreur de prédiction *a priori*) défini par les équations suivantes :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)\phi(t)\epsilon^0(t+1) \quad (4.56)$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (4.57)$$

$$\epsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t) \quad (4.58)$$

On définit peut aussi établir un algorithme équivalent se basant sur une *erreur de prédiction a posteriori* définie par :

$$\epsilon(t+1) = \epsilon(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = y(t+1) - \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t+1)) \quad (4.59)$$

$$= y(t+1) - \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \quad (4.60)$$

Pour construire ce nouvel algorithme, on cherche à exprimer l'erreur de prédiction *a posteriori* ($\epsilon(t+1)$) en fonction de l'erreur de prédiction *a priori* ($\epsilon^0(t+1)$). On obtient donc

$$\epsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \quad (4.61)$$

$$= y(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t) - [\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t)]^T \phi(t) \quad (4.62)$$

$$(4.63)$$

En remarquant que

$$[\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t)] = F(t+1)\phi(t)\epsilon^0(t+1) \quad (4.64)$$

$$= F(t)\phi(t) \frac{\epsilon^0(t+1)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (4.65)$$

on obtient

$$\epsilon(t+1) = \epsilon^0(t+1) - \phi^T(t)F(t)\phi(t) \frac{\epsilon^0(t+1)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (4.66)$$

$$= \frac{\epsilon^0(t+1)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (4.67)$$

Cette nouvelle expression nous permet d'établir un *Algorithme des moindres carrés récursif* (avec erreur de prédiction *a posteriori*) défini par les équations suivantes :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\epsilon(t+1) \quad (4.68)$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (4.69)$$

$$\epsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (4.70)$$

4.4 Estimation à erreur bornée

4.4.1 Principe de l'estimation à erreur bornée (le cas scalaire)

Dans cette section, on considère que $\forall t \in \mathbb{N}$, $y(t) \in \mathbb{R}$. C'est à dire que l'on ne considère qu'une seule sortie du système que l'on cherche à identifier.

Soient $\theta \in \mathbb{R}^n$ un paramètre de ce système, et $\phi(\cdot) \in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N}$. On considère un modèle linéaire $\eta(\theta, \phi(\cdot))$, défini par :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \eta(t) = \theta^T \phi(t) \quad (4.71)$$

Soit $y(\cdot) \in (\mathbb{R})^\mathbb{N}$ la sortie mesurée du système réel, et on suppose que :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \begin{cases} y(t) = \eta(t) + w(t) \\ w(t) \in [w_{min}, w_{max}] \end{cases} \quad (4.72)$$

Sans perdre de généralité, on peut considérer que :

$$\forall t \in \mathbb{N}, w(t) \in [-1, 1] \quad (4.73)$$

En effet, pour cela, pour tout $t \in \mathbb{N}$, il suffit de réaliser la transformation suivante : $\overline{w}(t) = \frac{2w(t) - w_{max} - w_{min}}{w_{max} - w_{min}}$. On en déduirait alors :

$$\overline{y}(t) = \frac{2y(t) - w_{max} - w_{min}}{w_{max} - w_{min}} \quad (4.74)$$

$$\overline{\eta}(t) = \frac{2\eta(t)}{w_{max} - w_{min}} \text{ c'est à dire } \overline{\phi}(t) = \frac{2\phi(t)}{w_{max} - w_{min}} \quad (4.75)$$

Par la suite, on supposera que cette transformation est faite, et afin de ne pas alourdir les notations, on notera pour tout $t \in \mathbb{N}$, $y(t)$, $w(t)$, $\eta(t)$, $\phi(t)$ les quantités normalisées.

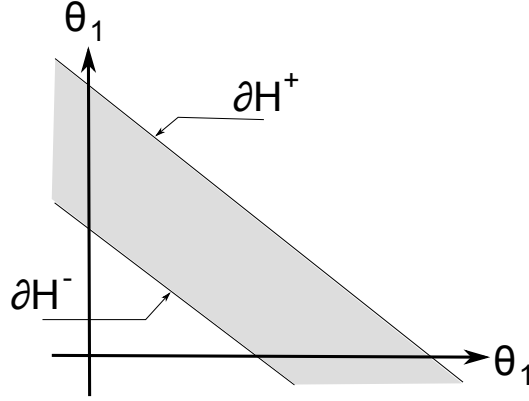


FIGURE 4.7 – Exemple de représentation graphique de l'ensemble $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$ dans le cas où $n = 2$.

De l'équation (4.73), on déduit que $|y(t) - \eta(t)| \leq 1$. Par conséquent, à chaque instant t , on peut définir l'ensemble des valeurs possibles de θ , à travers l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S}(y(t), \phi(t)) = \{\theta \mid -1 \leq y(t) - \theta^T \phi(t) \leq 1\} \quad (4.76)$$

$$\mathcal{S}(y(t), \phi(t)) = \{\theta \mid y(t) + 1 \geq \theta^T \phi(t) \geq y(t) - 1\} \quad (4.77)$$

L'expression (4.77) met en évidence que l'ensemble $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$ est défini par

$$\mathcal{S}(y(t), \phi(t)) = \mathcal{H}^-(t) \cap \mathcal{H}^+(t) \quad (4.78)$$

avec

$$\mathcal{H}^-(t) = \{\theta \mid \theta^T \phi(t) \geq y(t) - 1\} \quad (4.79)$$

$$\mathcal{H}^+(t) = \{\theta \mid \theta^T \phi(t) \leq y(t) + 1\} \quad (4.80)$$

Les espaces $\mathcal{H}^-(t)$ et $\mathcal{H}^+(t)$ sont chacun délimités par un hyperplan (dans \mathbb{R}^n) :

$$\partial \mathcal{H}^-(t) = \{\theta \mid \theta^T \phi(t) = y(t) - 1\} \quad (4.81)$$

$$\partial \mathcal{H}^+(t) = \{\theta \mid \theta^T \phi(t) = y(t) + 1\} \quad (4.82)$$

Si $n = 2$, un exemple de représentation graphique de $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$ est donné par la FIGURE 4.7.

A chaque instant $t \in \mathbb{N}$, les signaux $y(t)$ et $\phi(t)$ permettent de préciser l'ensemble des valeurs de θ possibles. Notons :

$$\mathcal{B}(t) = \bigcap_{i=0}^t \mathcal{S}(y(i), \phi(i)) \quad (4.83)$$

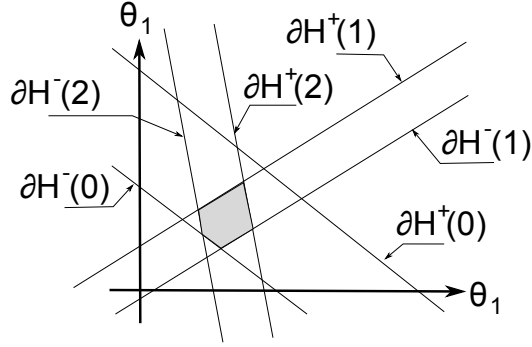


FIGURE 4.8 – Exemple de représentation graphique de l'ensemble $\mathcal{B}(2)$ dans le cas où $n = 2$.

Si $n = 2$, un exemple de représentation graphique de $\mathcal{B}(t)$ est donné par la FIGURE 4.8.

Pour quelques cas particuliers, $\mathcal{B}(t)$ peut ne pas être borné (lorsque $\forall t_1, t_2 \in [0, t]$, $\{\phi(t_1), \phi(t_2)\}$ constitue une famille liée), mais dans la plupart des situations, il existe t_0 tel que pour tout $t > t_0$, $\mathcal{B}(t)$ est borné.

Dans le cas général, pour t fixé, $\mathcal{B}(t)$ est un polytope dans \mathbb{R}^n . Cependant, pour des raisons de complexité de calcul, on préfère utiliser des ensembles plus faciles à manipuler. C'est à dire que l'on cherchera à englober $\mathcal{B}(t)$ dans un ensemble convexe $\mathcal{E}(t)$.

Remarque : Toutefois, il est à noter qu'alors on perd « la décroissance inclusive », c'est à dire que l'on n'a pas nécessairement que $\forall t \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}(t) \subseteq \mathcal{E}(t-1)$ (alors que c'était le cas pour $t \mapsto \mathcal{B}(t)$). La conséquence est qu'il peut exister $t_2 > t_1$ tels que $\mathcal{E}(t_2) \not\subseteq \mathcal{E}(t_1)$. (Cette situation se produit surtout lorsque l'une des hypothèses initiales n'est pas respectées.)

Par la suite, on s'attachera à considérer les techniques utilisant les ellipsoïdes comme ensemble convexe.

$$\mathcal{E}(c, P) = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid (\theta - c)^T P^{-1}(\theta - c)\} \quad (4.84)$$

avec $P > 0$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Deux critères :

$$\bar{\mathcal{E}}(t) = \arg \min_{\mathcal{E}(c, P) \supset \mathcal{I}(t)} \ln(\det P) \quad (4.85)$$

$$\bar{\mathcal{E}}(t) = \arg \min_{\mathcal{E}(c, P) \supset \mathcal{I}(t)} \text{tr}(P) \quad (4.86)$$

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{S}(y(t), \phi(t)) \cap \mathcal{E}(t-1) \quad (4.87)$$

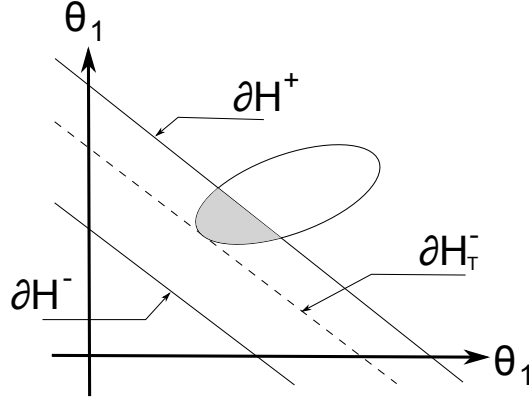


FIGURE 4.9 – Exemple de représentation graphique, illustrant l'utilité d'une réduction de bande dans le cas où $n = 2$.

4.4.2 Réduction de bande

L'un des hyperplans délimitant la bande définie par $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$ peut ne pas intercepter l'ellipsoïde $\mathcal{E}(t-1) = \mathcal{E}(c_{t-1}, P_{t-1})$. Alors, dans le cas où l'intersection entre cet ellipsoïde et la bande n'est pas un ensemble vide, il peut être intéressant de réduire la bande $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$, afin de considérer uniquement les éléments « pertinents » de cette bande. On cherche donc les hyperplans parallèles à $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$, et tangents à $\mathcal{E}(t-1) = \mathcal{E}(c_{t-1}, P_{t-1})$. Ces derniers sont définis par :

$$\mathcal{H}(t) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \phi_t^T \theta = \phi_t^T c_{t-1} + \sqrt{\phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \right\} \quad (4.88)$$

$$\mathcal{H}(t) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid \phi_t^T \theta = \phi_t^T c_{t-1} - \sqrt{\phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \right\} \quad (4.89)$$

En considérant les hyperplans parallèles à $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$, et tangents à $\mathcal{E}(t-1)$, on obtient la bande réduite suivante :

$$\mathcal{S}'(t) = \{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid y^-(t) \leq \phi^T \theta \leq y^+(t) \} \quad (4.90)$$

avec

$$y^+(t) = \min \left(y(t) + 1, \phi(t)^T c_{t-1} + \sqrt{\phi(t)^T P_{t-1} \phi(t)} \right) \quad (4.91)$$

$$y^-(t) = \max \left(y(t) - 1, \phi(t)^T c_{t-1} - \sqrt{\phi(t)^T P_{t-1} \phi(t)} \right) \quad (4.92)$$

$$\bar{y}(t) = \frac{y^+(t) + y^-(t)}{y^+(t) - y^-(t)} \quad (4.93)$$

$$\bar{\phi}(t) = \frac{2\phi(t)}{y^+(t) - y^-(t)} \quad (4.94)$$

Ainsi, on peut s'intéresser à une bande réduite $\mathcal{S}'(t)$, sans pour autant perdre des « informations ».

4.4.3 Englober l'intersection dans une ellipsoïde

Dans cette partie, on suppose que l'on dispose d'un ellipsoïde $\mathcal{E}(c(t-1), P(t-1))$, et d'une bande $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$. On cherche alors à établir des critères permettant de choisir un ellipsoïde englobant l'intersection de l'ellipsoïde précédent, et de la bande. On peut alors établir les relations suivantes

$$c_\lambda = c(t-1) + \frac{\lambda\delta}{1+\lambda g} P(t-1)\phi(t) \quad (4.95)$$

$$P_\lambda = \left(1 + \lambda - \frac{\lambda\delta^2}{1+\lambda g}\right) \left(P(t-1) - \frac{\lambda}{1+\lambda g} P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)\right) \quad (4.96)$$

avec

$$g = \phi^T(t)P(t-1)\phi(t) \quad \text{et} \quad \delta = y(t) - \phi^T(t)c(t-1) \quad (4.97)$$

Ainsi, on a donc que les ellipsoïdes $\mathcal{E}_\lambda = (c_\lambda, P_\lambda)$ sont paramétrés par la valeur de λ . Pour déterminer la valeur de λ la plus appropriée, deux critères sont le plus souvent utilisés :

- le critère du déterminant ;
- et le critère de la trace

Chacun des critères étant précisé par la suite. On notera λ^* la valeur pour laquelle le critère choisi atteint l'optimum.

Critère du déterminant

Le critère du déterminant permet d'obtenir l'ellipsoïde de volume minimal. λ^* est défini par :

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \geq 0} \ln \det (P_\lambda) \quad (4.98)$$

A partir de l'expression (4.96), on établit que

$$\det(P_\lambda) = \left(1 + \lambda - \frac{\lambda\delta^2}{1+\lambda g}\right)^n \frac{\det(P(t-1))}{1+\lambda g} \quad (4.99)$$

On peut alors calculer la valeur de λ^* .

Pour $n = 1$, on a :

$$\lambda^* = -\frac{1}{g} \left(\frac{2\delta^2}{g - \delta^2 - 1} - 1 \right) \quad (4.100)$$

Pour $n > 1$, on a alors :

$$\lambda^* = \frac{-(2n - g - 1 + \delta^2) + \sqrt{(g - 1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2(n^2 - 1)}}{2(n - 1)g} \quad (4.101)$$

Critère de la trace

Le critère de la trace peut conduire à des ellipsoïdes mieux conditionnés (moins allongés dans une direction particulière). L'expression de λ^* est définie comme suit.

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \geq 0} \text{tr} (P_\lambda) \quad (4.102)$$

A partir de l'expression (4.96), on obtient

$$\text{tr} (P_\lambda) = \left(1 + \lambda - \frac{\lambda\delta^2}{1 + \lambda g}\right) \left(\mu - \frac{\lambda\gamma}{1 + \lambda g}\right) \quad (4.103)$$

Cette expression permet d'établir que

$$\lambda^* = 2\sqrt{-M} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{\beta_1}{3} \quad (4.104)$$

avec

$$\gamma = \phi^T(t)P^2(t-1)\phi(t) \quad (4.105)$$

$$g = \phi^T(t)P(t-1)\phi(t) \quad (4.106)$$

$$\mu = \text{tr} \left(\hat{P}(t-1) \right) \quad (4.107)$$

$$\beta_1 = \frac{3}{g} \quad (4.108)$$

$$\beta_2 = \frac{g[\mu(1 - \delta^2) - \gamma] + 2[g\mu - \gamma(1 - \delta^2)]}{g^2(g\mu - \gamma)} \quad (4.109)$$

$$\beta_3 = \frac{\mu(1 - \delta^2) - \gamma}{g^2(g\mu - \gamma)} \quad (4.110)$$

$$M = \frac{3\beta_2 - \beta_1^2}{9} \quad (4.111)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{N}{\sqrt{-M^3}}\right) \quad (4.112)$$

$$N = \frac{9\beta_1\beta_2 - 27\beta_3 - 2\beta_1^3}{54} \quad (4.113)$$

4.4.4 Algorithme d'estimation

Pour $t = 1, \dots, T$, l'ellipsoïde est mis à jour récursivement selon la démarche suivante

- si $y(t)+1 \leq \phi^T(t)c(t-1) - \sqrt{\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}$ ou $y(t)-1 \geq \phi^T(t)c(t-1) + \sqrt{\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}$, conclure que $\mathcal{A} = \emptyset$, et arrêter l'algorithme.
- si $y(t)+1 \geq \phi^T(t)c(t-1) + \sqrt{\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}$ et $y(t)-1 \leq \phi^T(t)c(t-1) - \sqrt{\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}$.
- autrement, si $y(t)+1 > \phi^T(t)c(t-1) + \sqrt{\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}$ ou $y(t)-1 < \phi^T(t)c(t-1) - \sqrt{\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}$, réduire la bande $\mathcal{S}(y(t), \phi(t))$ en remplaçant $y(t)$ par $\bar{y}(t)$ défini en (4.93) et $\phi(t)$ par $\bar{\phi}(t)$ défini en (4.94), puis actualiser $\mathcal{E}(t-1)$ d'une façon qui dépend du critère retenu. Pour le critère du déterminant, si $n(1 - \delta^2) - g \geq 0$, alors $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t-1)$; sinon $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(c_{\lambda^*}, P_{\lambda^*})$, λ^* étant donné par (4.101). Pour le critère de la trace, si $\beta_3 < 0$, alors $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t-1)$; sinon $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(c_{\lambda^*}, P_{\lambda^*})$, λ^* étant donné par (4.104). Dans les deux cas, c_λ et P_λ sont obtenus en remplaçant λ par λ^* dans (4.95) et (4.96).

4.4.5 Le cas vectoriel : le problème de l'intersection de plusieurs ellipsoïdes

Dans cette section, on considère que $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(\cdot) \in (\mathbb{R}^p)^\mathbb{N}$. Pour chacune des p sorties du système que l'on cherche à identifier, on peut construire une suite d'ensembles telles que $\theta \in \mathcal{A}(i, t)$, avec $i \in [1, p] \cap \mathbb{N}$.

$$w(t) = y(t) - C(t)\theta \quad (4.114)$$

Et tout comme précédemment, on peut inclure cet ensemble dans un ellipsoïde, et construire pour chacune des sorties, une suite d'ellipsoïdes. Cependant, ici, on cherchera aussi à recouper les informations recueillies sur chacune des sorties afin de les exploiter au mieux.

$$w_j(t) = y_j(t) - C_j(t)\theta \quad (4.115)$$

A l'instant t , les mesures antérieures ont permis d'établir que $\theta \in \hat{\mathcal{E}}(t-1)$ et les données actuelles imposent que $w_j(t) \in \mathcal{B}^{r_j}$ ($j = 1, \dots, J$), ce qui entraîne que θ appartient aussi à :

$$\mathcal{E}^j(t) = \{\theta \in \mathbb{R}^n : (y_j(t) - C_j(t)\theta) \in \mathcal{B}^{r_j}\} \quad (4.116)$$

qui est un ellipsoïde non vide mais dégénéré (par exemple une bande), sauf dans le cas très particulier où $C_j(t)$ est de rang plein. Pour calculer $\hat{\mathcal{E}}(t)$, il

est alors utile de disposer d'une technique permettant de caractériser l'intersection de $\hat{\mathcal{E}}(t-1)$ et des ellipsoïdes éventuellement non bornées $\mathcal{E}^j(t)$ ($j = 1, \dots, J$).

Dans la suite, nous décrirons tout ellipsoïde éventuellement non borné par :

$$\mathcal{E}^\cap(c, M) = \{ \theta \in \mathbb{R}^n : (\theta - c)^T M (\theta - c) \leq 1, M \geq 0 \}, \quad (4.117)$$

où $M \geq 0$ signifie que M est une matrice symétrique définie non négative. Avec cette notation, $\hat{\mathcal{E}}(t-1) = \mathcal{E}^\cap(\hat{c}(t-1), \hat{P}^{-1}(t-1))$, et $\mathcal{E}_j(t)$ peut se réécrire sous la forme $\mathcal{E}^\cap(c_j(t), M_j(t))$, avec $M_j(t) = C_j^T(t)C_j(t)$. Le centre $c_j(t)$ de $\mathcal{E}_j(t)$ n'est pas nécessairement défini de façon unique, mais il n'est pas utilisé dans la suite (il doit vérifier $C_j(t)c_j(t) = y_j(t)$).

Considérons maintenant $K = J+1$ ellipsoïdes $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}^\cap(c_k, M_k) \in \mathbb{R}^n$ avec $k = 1, \dots, K$. Pour l'estimation de paramètres, le premier de ces ellipsoïdes correspond à $\hat{\mathcal{E}}(t-1)$ et les suivants à $\mathcal{E}_j(t)$ ($j = 1, \dots, J$). Le problème à résoudre est de trouver \mathcal{E}^* tel que :

$$\mathcal{E}^* = \arg \min_{\mathcal{E}^\cap(c, M) \supset \mathcal{I}_K} \ln(\det M^{-1}) \quad (4.118)$$

ou tel que

$$\mathcal{E}^* = \arg \min_{\mathcal{E}^\cap(c, M) \supset \mathcal{I}_K} \text{tr}(M^{-1}) \quad (4.119)$$

avec $\mathcal{I}_K = \bigcap_{k=1}^K \mathcal{E}_k$.

Soit \mathcal{D}^+ l'ensemble des vecteurs $\alpha \in \mathbb{R}^K$ tels que leurs composantes α_k vérifient $\alpha_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$. La famille d'ellipsoïdes $\mathcal{E}^\cap(c_\alpha, (1 - \delta_\alpha)^{-1} M_\alpha)$ définie par :

$$\begin{cases} M_\alpha &= \sum_{k=1}^K \alpha_k M_k \\ c_\alpha &= M_\alpha^{-1} \sum_{k=1}^K \alpha_k M_k c_k \\ \delta_\alpha &= \sum_{k=1}^K \alpha_k c_k^T M_k c_k - c_\alpha^T M_\alpha c_\alpha \end{cases} \quad (4.120)$$

avec $\alpha \in \mathcal{D}^+$ contient \mathcal{I}_K [19]. Par construction $\delta_\alpha \in [0, 1[$, ainsi $\mathcal{E}^\cap(c_\alpha, M_\alpha)$ contient $\mathcal{E}^\cap(c_\alpha, (1 - \delta_\alpha)^{-1} M_\alpha)$ et a fortiori \mathcal{I}_K . On dispose donc de deux familles paramétrées $\mathcal{E}_\alpha^1 = \mathcal{E}^\cap(c_\alpha, (1 - \delta_\alpha)^{-1} M_\alpha)$ et $\mathcal{E}_\alpha^2 = \mathcal{E}^\cap(c_\alpha, M_\alpha)$ qui pourront être utilisées pour trouver une solution sous-optimale aux problèmes d'optimisation (4.118) et (4.119) en les transformant en des problèmes d'optimisation paramétrique sur α . Avec la famille \mathcal{E}_α^2 , les problèmes sont convexes [18], ce qui simplifie l'optimisation. Quand la famille \mathcal{E}_α^2 est utilisée pour trouver la valeur optimale α^* de α , une meilleure approximation extérieure est donnée par $\mathcal{E}_{\alpha^*}^1$. Quelle que soit la famille retenue, pour l'estimation de paramètres, l'ellipsoïde finalement obtenu sera pris pour $\hat{\mathcal{E}}_t$.

Pour des contraintes de temps réel, on peut préférer une version récursive du problème, où les ellipsoïdes \mathcal{E}_t^j sont pris en compte successivement, au prix d'une augmentation du pessimisme. Soit $\mathcal{E}_k^r = \mathcal{E}^\cap(c_k^r, M_k^r)$ une approximation ellipsoïdale obtenue après traitement des k premiers ellipsoïdes $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$. L'approximation suivante est obtenue en cherchant le plus petit ellipsoïde $\mathcal{E}_{k+1}^r = \mathcal{E}^\cap(c_{k+1}^r, M_{k+1}^r)$ dans la famille considérée contenant $\mathcal{E}_k^r \cap \mathcal{E}_{k+1}$. D'après ce qui précède, cet ellipsoïde est donné par :

$$\begin{cases} c_{k+1}^r &= c_{k+1}^r(\alpha_{k+1}^*), \\ M_{k+1}^r &= M_{k+1}^r(\alpha_{k+1}^*) \end{cases} \quad (4.121)$$

où :

$$\alpha_{k+1} = \arg \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \quad (4.122)$$

et :

$$\begin{cases} M_{k+1}^r(\alpha) &= \alpha M_k^r + (1 - \alpha) M_{k+1} \\ c_{k+1}^r &= (M_{k+1}^r(\alpha))^{-1} [\alpha M_k^r c_k^r + (1 - \alpha) M_{k+1} c_{k+1}] \\ \delta(\alpha) &= \alpha c_k^{rT} M_{k+1}^r c_k^r + (1 - \alpha) c_k^T M_{k+1} c_k - c_{k+1}^{rT}(\alpha) M_{k+1}^r(\alpha) c_k^r(\alpha) \end{cases} \quad (4.123)$$

pour la famille \mathcal{E}_α^1 , selon le critère retenu, $\varphi(\alpha)$ est donné par :

$$\varphi(\alpha) = -\ln \det ((1 - \delta(\alpha))^{-1} M_{k+1}^r(\alpha)) \quad (4.124)$$

ou par :

$$\varphi(\alpha) = \text{tr} ((1 - \delta(\alpha))^{-1} M_{k+1}^r(\alpha))^{-1} \quad (4.125)$$

Les calculs peuvent être simplifiés en utilisant la famille \mathcal{E}_α^2 et en prenant $\varphi(\alpha) = -\ln \det M_{k+1}^r(\alpha)$ ou $\varphi(\alpha) = \text{tr} (M_{k+1}^r(\alpha))^{-1}$, au détriment de la qualité de l'approximation. Il a cependant été constaté dans de nombreux cas que la dégradation était négligeable. L'algorithme est initialisé avec $c_1^r = c_1$ et $M_1^r = M_1$. Pour l'estimation de paramètres, dans (4.123), on a alors $M_{k+1} c_{k+1} = C_k^T(t) y_k(t)$, $M_{k+1} = C_k^T(t) C_k(t)$ et $c_{k+1}^k{}^T M_{k+1} c_{k+1} = y_k^T(t) y_k(t)$; et l'ellipsoïde finalement obtenu \mathcal{E}_{j+1}^r sera pris pour $\hat{\mathcal{E}}(t)$.

Remarque : Dans le cas particulier où \mathcal{E}_{k+1} est une bande, les résultats du paragraphe 4.4.3 (page 99) s'appliquent et α_{k+1}^* est directement donné par $\alpha_{k+1}^* = \frac{1}{1 + \lambda_{k+1}^*}$.

Remarques : Dans le cadre de l'utilisation des estimateurs pour la commande adaptative, la supervision de l'estimateur à erreur bornée n'est a priori pas utile dans l'objectif de geler l'estimation lorsque les informations sont insuffisantes. Par la construction même de l'estimateur, celui-ci reste constant lorsque les informations sont insuffisantes.

4.5 Filtrage des données

D'une manière générale, le filtrage des signaux d'entrée-sortie est une opération très souvent nécessaire en commande adaptative. Habituellement, il permet essentiellement de recouvrir la réponse fréquentielle du système à commander si la structure du modèle d'estimation est convenablement choisie pour cette fin. Il est à noter cependant qu'en général, le filtrage ne permet pas de pallier le problème de dérive des paramètres estimés en présence de dynamiques négligées.

Dans le cadre de cette thèse, le filtrage sera employé pour remplir une double fonction. La première sera de reconstruire la dérivée de l'état, et la seconde sera de filtrer les perturbations.

4.5.1 Reconstruction de la dérivée de l'état

La dérivée de l'état est reconstruite à l'aide d'un filtre passe-bas $\left[\frac{1}{D(s)}\right]$. Ainsi, en notant $x_f = \left[\frac{1}{D(s)}\right] x$; $u_f = \left[\frac{1}{D(s)}\right] u$ et $\dot{x}_f = \left[\frac{s}{D(s)}\right] x$, alors l'équation

$$\dot{x}_f = Ax_f + Bu_f \quad (4.126)$$

peut être écrite sous la forme

$$\beta(t) = \Omega^T \phi(t) \quad (4.127)$$

avec $\beta(t) = \dot{x}_f$, $\phi(t)^T = [x_f(t)^T, u_f(t)^T]$ et $\Omega^T = [A, B]$. Par conséquent, en supposant que tous les θ_i sont des composantes de la matrice Ω , l'estimation de θ peut être obtenue par celle de Ω . Autrement dit, pour tout i , il existe l_i et m_i tels que $\theta_i = \Omega_{l_i, m_i}$, où Ω_{l_i, m_i} est la composante de la l_i -ème ligne et m_i -ème colonne de la matrice Ω .

4.5.2 Filtrage des perturbations

On considère maintenant que le modèle est bruité.

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= x + w \end{cases} \quad (4.128)$$

Le filtre agit donc sur les quantités mesurées, et on obtient :

$$\dot{x}_f = \left[\frac{s}{D(s)} \right] (x + w) = Ax_f + Bu_f + \epsilon \quad (4.129)$$

$$= A \left(\left[\frac{1}{D(s)} \right] (x + w) \right) + Bu_f + \epsilon \quad (4.130)$$

$$(4.131)$$

On en déduit donc que :

$$\epsilon = \left[\frac{1}{D(s)} \right] v + \left[\frac{1}{D(s)} \right] (sI - A)w \quad (4.132)$$

A partir de cette expression, on pourra donc choisir le filtre $D(s)$ le plus approprié pour rejeter les perturbations que l'on aura choisi de considérer.

4.6 Estimation et stabilité du schéma adaptatif

L'estimation représente une composante importante du schéma d'adaptation. En effet, il faut s'assurer que l'estimation n'affecte pas la stabilité du schéma d'adaptation.

Définition 29 *On dira qu'une séquence $\{s(t)\}_{t \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est α -asymptotiquement petite en moyenne (α -APM) si :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \lim_{l \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{k} \sum_{t=l+1}^{t=l+k} s(t) \leq \alpha \quad (4.133)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k} \sum_{t=l+1}^{t=l+k} s(t) \right\| \leq \alpha \quad (4.134)$$

Selon [60], « l'école française a mis en évidence les propriétés requises de l'algorithme d'adaptation paramétrique pour assurer la stabilité d'un système de commande adaptative [50, 36, 70, 17, 37] » :

P1 : Les paramètres estimés sont bornés, soit :

$$\exists R_\theta \in \mathbb{R}^+ \|\hat{\theta}(t)\| \leq R_\theta \quad (4.135)$$

P2 : Le modèle estimé reproduit le comportement d'entrée-sortie du procédé en moyenne, soit :

$$\exists \gamma_\theta \in \mathbb{R}^+ \{ |y_{f_n}(t) - \hat{\theta}(t)\phi_{f_n}(t-1)| \} \text{ est } \gamma_\theta - \text{APM} \quad (4.136)$$

P3 : Les variations des paramètres estimés sont petites en moyenne, soit :

$$\exists \mu_\theta \in \mathbb{R}^+ | \{\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)\} \text{ est } \mu_\theta - \text{APM} \quad (4.137)$$

P4 : Le modèle estimé est admissible en moyenne, il existe une sous-séquence croissante $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, telle que $\{t_k - t_{k-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et le système de commande correspondant au modèle obtenu à partir de $\{\hat{\theta}(t_k)\}$ est asymptotiquement stable.

Chapitre 5

Démarche de l'étude théorique

5.1 Introduction

Comme indiqué dans l'introduction, dans cette thèse, nous nous intéressons au schéma de la FIGURE 5.1, où le procédé et le correcteur sont tous deux modélisés par des structures LFT, et où l'estimateur n'y apparaît pas de manière explicite, afin de ne pas surcharger le schéma.

Dans cette partie, nous chercherons à établir une méthodologie de syn-

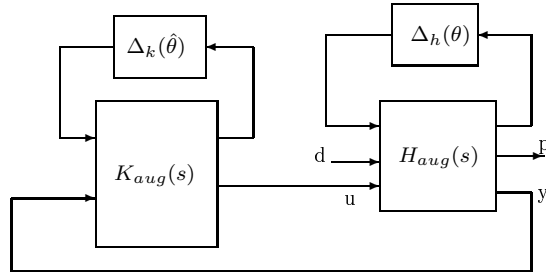


FIGURE 5.1 – Schéma de commande auto-adaptative dans le cas d'une modélisation par LFT. $K_{aug}(s)$ représente la partie du correcteur synthétisée hors ligne. $\Delta_h(\theta)$ et $\Delta_k(\hat{\theta})$ représentent les dépendances respectivement par rapport au paramètre θ et au paramètre estimé $\hat{\theta}$ modélisées sous forme LFT.

thèse d'un correcteur auto-adaptatif pour résoudre un problème de commande robuste d'un procédé linéaire incertain. Pour se faire, nous reprenons les travaux présentés dans [26], et nous proposons de procéder en quatre étapes :

1. Mettre le procédé sous forme LFT (page 108) ;
2. Synthétiser un correcteur LFT (page 111) ;

3. Etudier la stabilité et les performances du correcteur obtenu en fonction des erreurs d'estimation (page 113); (Cette étape permet aussi d'établir les contraintes que doivent respecter l'estimateur pour garantir la stabilité et les performances souhaitées.)
4. Synthétiser un estimateur respectant les contraintes précédemment obtenues (page 118).

5.2 Mise sous forme LFT du procédé

Dans cette partie, on considère que les paramètres de séquençement sont déterminés et qu'il s'agit des éléments des matrices A et B d'une représentation d'état du procédé. On s'attache alors à rechercher une méthode pour mettre le procédé sous forme LFT.

5.2.1 Mise sous forme LFT de $H(s, \theta)$

Mettre un procédé sous forme LFT est une méthode très fréquente en Automatique. Il est en effet très souvent possible de mettre un procédé sous forme LFT, afin d'isoler à l'intérieur d'un bloc certains paramètres dont dépend le procédé.

Pour un procédé $H(s, \theta)$, l'objet de la mise sous forme LFT consiste à rechercher h_1, \dots, h_n des entiers naturels, et une représentation d'état de (H_{aug}) définie par :

$$(H_{aug}) \begin{cases} \dot{x} &= A_l x + B_{l,1} w + B_{l,2} u \\ z &= C_{l,1} x + D_{l,11} w + D_{l,12} u \\ y &= C_{l,2} x + D_{l,21} w + D_{l,22} u \end{cases} \quad (5.1)$$

telle que

$$\mathcal{F}_u(H_{aug}(s), \Delta_h(\theta)) = H(s, \theta) \quad (5.2)$$

avec

$$\Delta_h(\theta) = \text{diag}(\theta_1 I_{h_1}, \dots, \theta_n I_{h_n}) \quad (5.3)$$

Deux importantes questions se posent lors de la mise sous forme LFT. La première est de savoir s'il est effectivement possible de représenter le système sous forme LFT et la deuxième est de savoir comment. De plus, on cherchera à savoir si cette forme est minimale.

La mise sous forme LFT est soumise à la contrainte de nécessiter une dépendance au moins fractionnaire du procédé par rapport aux paramètres.

Mais cette contrainte, lorsqu'elle est rencontrée, est très facilement contournée par l'utilisation de fractions d'approximation.

Cependant, comme nous l'avons vu précédemment dans la section 2.2 page 37, lorsqu'elle existe, la représentation LFT d'un procédé n'est pas unique, et idéalement, par rapport à des considérations d'implémentation, parmi toutes les représentations LFT possibles, on préfère celle qui est minimale. Par conséquent, la mise sous forme LFT résulte d'abord d'un choix de méthode. Aujourd'hui, de nombreux travaux ont été réalisés sur cette question, et des outils tels que la LFR Toolbox ([54]) permettent de réaliser cette fonction sans trop de difficultés.

5.2.2 $H(s, \theta)$: une représentation d'état structurée

Mise sous forme LFT du procédé

Supposons que chacun des paramètres est une composante des matrices $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u}$. C'est à dire qu'en notant :

$$\Omega = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A(\theta)^T \\ B(\theta)^T \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

on a que

$$\forall i \in [1, n], \exists (l_i, m_i) \in [1, n_x + m_u] \times [1, n_x] \quad \text{tel que} \quad \theta_i = \Omega_{(l_i, m_i)} \quad (5.5)$$

où $\Omega_{(l_i, m_i)}$ désigne la composante de la l_i -ième ligne et la m_i -ième colonne de Ω .

Ce choix de paramétrage facilite l'estimation. En effet, par la suite on utilisera un estimateur paramétrique linéaire et les paramètres de séquençement choisis sont les éléments des matrices $A(\theta)$ et $B(\theta)$. Par conséquent, il suffira d'estimer les matrices $A(\theta)$ et $B(\theta)$ pour obtenir θ . Il est à noter toutefois que ce choix n'enlève rien à la généralité du problème traité. En effet, comme il a été fait et expliqué dans [56], un changement de paramètre est en fait une mise sous forme LFT. Il y est d'ailleurs conseillé d'utiliser ce type de paramétrage pour la synthèse d'un correcteur. Par conséquent, tout autre paramétrage est possible, pourvu que d'une part ce paramétrage permette la mise sous forme LFT du procédé, et que d'autre part l'estimation de ces paramètres puisse être réalisée. Par la suite, on ne s'en tiendra donc qu'à ce paramétrage.

Dans [75], il est montré que si les matrices d'état sont des fonctions linéaires des paramètres et que si $D_{l,11} = 0$, alors il existe toujours une représentation sous forme LFT. On pose donc $D_{l,11} = 0$ pour ainsi s'assurer de l'existence d'une forme LFT.

Choix d'une méthode de mise sous forme LFT Dans le cas particulier que l'on considère, qui est relativement simple, une méthode de mise sous forme LFT adaptée est la méthode dite de Morton. En réalité, le cas considéré ici est si simple, que l'on peut donner une expression explicite de cette mise sous forme LFT.

En effet, puisque l'on a supposé que chacun des paramètres est une composante des matrices $A(\theta)$ et $B(\theta)$, on peut écrire que :

$$\Delta_h = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n) \quad (5.6)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_\theta \quad (5.7)$$

avec

$$\begin{cases} (\Omega_\theta)_{(i,j)} &= \Omega_{(i,j)} \text{ si } (i,j) \in \{(l_k, m_k) | k \in [1, n]\} \\ (\Omega_\theta)_{(i,j)} &= 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (5.8)$$

où les couples (l_k, m_k) sont définis dans l'équation (5.5). Et on note Ω_0 son « complémentaire » ($\Omega_0 = \Omega - \Omega_\theta$) :

$$\begin{cases} (\Omega_0)_{(i,j)} &= 0 \text{ si } (i,j) \in \{(l_k, m_k) | k \in [1, n]\} \\ (\Omega_0)_{(i,j)} &= \Omega_{(i,j)} \text{ sinon} \end{cases} \quad (5.9)$$

On a alors

$$\Omega_\theta = B_{l,1} \Delta_h(\theta) \Psi \quad (5.10)$$

avec $\Psi = [C_{l,1} \ D_{l,12}]$, $(B_{l,1})_{l_i, i} = 1$ et $(\Psi)_{i, m_i} = 1$ et toutes les autres composantes sont nulles. Pour en déduire $C_{l,1}$ et $D_{l,12}$, il suffit de « découper » Ψ de manière adéquate. On retrouve alors :

$$\dot{x} = (A_l + B_{l,1} \Delta_h(\theta) C_{l,1})x + (B_{l,1} \Delta_h(\theta) D_{l,12} + B_{l,2})u \quad (5.11)$$

De plus, la mise sous forme LFT obtenue est nécessairement minimale, car chacun des paramètres considéré n'apparaît qu'une seule et unique fois dans $\Delta_h(\theta)$.

La forme LFT est-elle bien posée ? (cf. Définition 10 page 38) Le choix particulier de prendre $D_{l,11} = 0$, permet de garantir que $\det(I - D_{l,11} \Delta_h(\theta)) \neq 0$ pour tout θ , mais n'assure pas pour autant le bien posé de la forme LFT. En effet, il faut aussi s'assurer que $\det(I - C_{l,1}(sI - A_l)^{-1} B_{l,1} \Delta_h(\theta)) \neq 0$, pour tout $s \in j\mathbb{R}$. En fait, lorsque $\det(I - D_{l,11} \Delta_h(\theta)) \neq 0$, s'assurer du « bien posé » revient à s'assurer que la matrice $A_l + B_{l,1} \Delta_h(\theta) (I - D_{l,11} \Delta_h(\theta))^{-1} C_{l,1}$ possède toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche, pour toutes les valeurs de θ . Par conséquent, si $H(s, \theta)$ est stable pour toutes les valeurs de

θ considérées, et que les variations de chacun des paramètres sont indépendantes, alors la condition $D_{l,11} = 0$ garantit le « bien posé ». Bien souvent, pour le choix des paramètres que nous avons choisi, les variations sont liées, il n'est donc pas impossible que le procédé ne soit pas « bien posé » pour certaines valeurs de paramètres considérées alors que le système initial est stable pour toutes les valeurs de paramètres parcourues.

5.3 Choix d'une technique de synthèse d'un correcteur séquencé

Le procédé étant mis sous forme LFT, il faut maintenant *choisir une méthode de synthèse d'un correcteur séquencé*. Cette méthode doit permettre de proposer un correcteur sous forme LFT, dont l'un des blocs ne regroupe que les paramètres de séquencement.

5.3.1 Synthèse du correcteur LFT

On considère dans cette partie que l'on a mis le procédé sous forme LFT. Notons $H(s, \theta) = \mathcal{F}_u(H_{aug}(s), \Delta_h(\theta))$ ce procédé sous forme LFT. L'objectif est de synthétiser un correcteur $K_{aug}(s)$ tel que pour tout

$$\theta \in \{[u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^n | \forall i \in [1, n], u_i \in [\theta_{i,min}, \theta_{i,max}]\} \quad (5.12)$$

le schéma de la FIGURE 5.2 est stable. Pour réaliser cette synthèse, on se

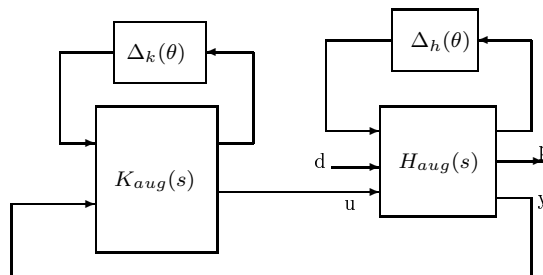


FIGURE 5.2 – Schéma pour la synthèse du « correcteur séquencé », où θ est le paramètre de séquencement.

tourne vers la littérature scientifique. On y sélectionne trois méthodes de synthèse :

1. La synthèse LPV (cf. 3.2.2 page 75)
2. La synthèse convexe (cf. 3.2.3 page 75)
3. La synthèse modale (cf. 3.2.4 page 77)

Ces trois méthodes de synthèse permettent de résoudre le problème exposé précédemment. Bien évidemment, il existe bien d'autres méthodes de synthèse remplissant cette même exigence. Mais notre objectif est d'établir une méthodologie générale de synthèse de correcteur adaptatif. Il ne paraît donc pas utile de réaliser une étude exhaustive de toutes les méthodes de synthèse. S'il l'estime nécessaire, il appartiendra à l'utilisateur d'adapter la méthode de synthèse choisie au cadre général proposé ici. On se contentera donc simplement de réaliser un choix parmi ces trois méthodes.

La méthode LPV établit un certain nombre d'hypothèses sur la variation des paramètres et est en plus conservative dans la résolution du problème qu'elle traite. Or ceci peut constituer un inconvénient pour la méthodologie que l'on essaie de mettre en place dans la mesure où l'objectif est d'établir a posteriori les conditions sur les variations des paramètres pour garantir la stabilité. C'est à dire que ce n'est qu'une fois que l'on aura le correcteur garantissant la stabilité du schéma de la FIGURE 5.2 (pour tout $\theta \in \{[u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^n | \forall i \in [1, n], u_i \in [\theta_{i,min}, \theta_{i,max}]\}$, θ constant), que dans l'étape d'analyse (Cf. 5.4 page 113) on établira les contraintes que devra respecter l'estimateur pour garantir la stabilité. L'objectif étant de réduire le conservatisme dans la méthodologie présentée, il n'est donc pas pertinent d'en introduire ici.

La méthode de synthèse convexe est elle aussi conservative, car il s'agit de synthèses polytopiques utilisant des contraintes quadratiques sous forme LMI (c'est à dire que la même matrice de Lypaunov est utilisée pour établir plusieurs contraintes de synthèse).

Des trois méthodes sélectionnées, la méthode de synthèse modale est celle qui engendre le moins de conservatisme du fait de l'utilisation de méthodes algébriques.

5.3.2 Choix réalisé

Par conséquent, pour mettre en œuvre la méthodologie présentée ici, on propose l'utilisation de la synthèse modale. Cette méthode présente l'avantage de proposer un algorithme fournissant directement un correcteur sous forme LFT de manière simple où l'un des blocs regroupe uniquement les paramètres de séquencement. Elle permet aussi de garantir la stabilité au moins pour le cas stationnaire (c'est à dire lorsque la valeur estimée du paramètre

égale la valeur vraie) pour toutes les valeurs considérées des paramètres. De plus, les outils informatiques permettant de mettre en place cette méthode existent déjà. Cependant, il est important de noter que ce n'est pas le seul choix possible, et n'importe quelle autre méthode de synthèse s'appliquant sur un procédé LFT pour proposer un correcteur LFT est utilisable dans le cadre général de la méthodologie que l'on propose.

5.4 Analyse de la boucle fermée auto-séquencée

Le procédé étant mis sous forme LFT, le correcteur LFT ayant été synthétisé, il faut maintenant *analyser la boucle fermée auto-séquencée*. Dans cette partie, on cherchera à analyser la boucle fermée auto-adaptative sans exprimer l'estimateur de manière explicite, pour en déduire les critères que doivent respecter l'estimateur pour garantir la stabilité.

Pour analyser la boucle fermée adaptative, on propose tout d'abord de mettre l'ensemble du schéma sous forme LFT afin d'isoler d'une part la valeur vraie des paramètres qui apparaissent au niveau du procédé et du correcteur, et d'autre part l'erreur d'estimation. Puis, on cherchera à établir une méthodologie pour analyser la stabilité de la boucle fermée adaptative Non-Linéaire, dans l'objectif d'obtenir des éléments pour synthétiser l'estimateur.

5.4.1 Mise sous forme LFT de l'ensemble du schéma adaptatif

On suppose que l'on dispose d'un correcteur $K(\hat{\theta})$ sous forme LFT. Soient

$$(K_{aug}) \begin{cases} \dot{x} &= A_{Kl}x + B_{Kl,1}w + B_{Kl,2}u \\ z &= C_{Kl,1}x + D_{Kl,11}w + D_{Kl,12}u \\ y &= C_{Kl,2}x + D_{Kl,21}w + D_{Kl,22}u \end{cases} \quad (5.13)$$

et

$$\Delta_k(\hat{\theta}) = \text{diag} \left(\hat{\theta}_1 I_{k_1}, \dots, \hat{\theta}_n I_{k_n} \right) \quad (5.14)$$

tels que $K(\hat{\theta}) = \mathcal{F}_u \left(K_{aug}, \Delta_k(\hat{\theta}) \right)$. $\hat{\theta}$ est une estimation du vecteur de paramètres θ . A chaque instant t , on peut donc écrire que $\hat{\theta}_i(t) = \theta_i(1 + \delta\theta_i(t))$, où $\delta\theta_i(t)$ représente l'erreur relative sur l'estimation du paramètre θ_i . Par la

suite, pour simplifier les notations, on omettra l'indication du temps (t). Du point de vue matriciel, on a :

$$\Delta_k(\hat{\theta}) = \Delta_k(\theta)(I + \Delta_k(\delta\theta)) \quad (5.15)$$

En notant $f_1 = \Delta_h(\theta)e_1$, $f_2 = \Delta_k(\theta)e_2$, et $f_3 = \Delta_k(\delta\theta)e_3$, le schéma de la FIGURE 5.1 (page 107) est transformé en celui de la FIGURE 5.3.

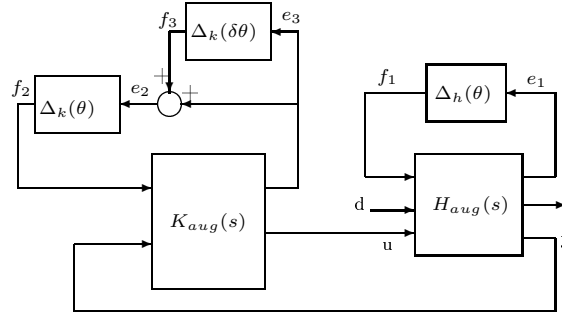


FIGURE 5.3 – Schéma de commande auto-adaptative mettant en évidence l'erreur d'estimation.

Remarque : Il est à noter que jusqu'à maintenant, la forme LFT n'a pas été normalisée (on n'a pas $\|\Delta(\theta)\|_{lip,2} \leq 1$). La normalisation à ce stade conduirait à une erreur.

Construction du schéma de validation

Notons

$$\tilde{\Delta} = \text{diag}(\theta_1 I_{q_1}, \dots, \theta_n I_{q_n}) \quad (5.16)$$

la matrice résultant du regroupement et de l'ordonnement des éléments des matrices $\Delta_h(\theta)$ et $\Delta_k(\theta)$, avec $q_i = h_i + k_i$.

En conservant les interconnexions entre les blocs, on regroupe $H_{aug}(s)$ et $K_{aug}(s)$ en un seul bloc que l'on nomme $N(s)$. Les premières entrées de ce dernier sont les vecteurs f_1 et f_2 regroupés et ordonnés pour correspondre à l'ordonnement de $\tilde{\Delta}$. Ensuite viennent f_3 et la perturbation non mesurée d . Les sorties de $N(s)$ obéissent à la même logique. En notant $\Delta_\delta = \Delta_k(\delta\theta)$, le schéma ainsi décrit est représenté par la FIGURE 5.4.

Le schéma de la FIGURE 5.4 ayant été obtenu, on réalise alors une normalisation, sachant que les variables $\delta\theta_i$ sont déjà normalisées. Cependant, afin de ne pas alourdir les notations, nous conserverons pour les variables

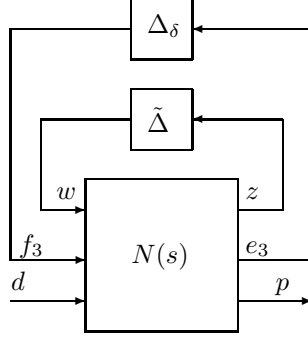


FIGURE 5.4 – Schéma pour la validation du schéma auto-adaptatif.

normalisées les mêmes notations qu'avant la normalisation. Ainsi, là où nous avons $\theta_i \in [\theta_{i,min}, \theta_{i,max}]$, nous aurons $\theta_i \in [-1, 1]$.

5.4.2 Analyse de la BF de type LFT en présence d'incertitudes Constantes et d'incertitudes Non-Linéaires

Dans un premier temps, pour finaliser la synthèse il faut s'assurer de la stabilité du schéma de la FIGURE 5.4 (page 115) lorsque l'estimation est parfaite, c'est à dire lorsque $\Delta_\delta = 0$. Puisque $\tilde{\Delta}$ est invariant dans le temps, les outils classiques de la μ -analyse, permettent de déterminer une borne supérieure et une borne inférieure de la marge de stabilité du schéma de la FIGURE 5.4 avec $\Delta_\delta = 0$.

Dans un deuxième temps, on cherche à calculer la *marge de stabilité robuste* par rapport aux erreurs d'estimation. Pour définir cette marge, on note

$$\underline{\Delta}_{CST} = \{diag(\theta_1 I_{q_1}, \dots, \theta_n I_{q_n}) \mid \forall i \in [1, n], \theta_i \in \mathbb{R}\}, \quad (5.17)$$

\mathbb{T}_{NL} l'ensemble de tous les transferts (linéaires ou pas) à une entrée et une sortie, et

$$\underline{\Delta}_{NL} = \{diag(\delta\theta_1 I_{k_1}, \dots, \delta\theta_n I_{k_n}) \mid \forall i \in [1, n], \delta\theta_i \in \mathbb{T}_{NL}\} \quad (5.18)$$

On peut alors noter

$$\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}_{CST} = \{diag(\theta_1 I_{q_1}, \dots, \theta_n I_{q_n}) \in \underline{\Delta}_{CST} \mid \forall i \in [1, n], |\theta_i| \leq 1\}, \quad (5.19)$$

et

$$\underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}_{NL} = \{diag(\delta\theta_1 I_{k_1}, \dots, \delta\theta_n I_{k_n}) \in \underline{\Delta}_{NL} \mid \forall i \in [1, n], \|\delta\theta_i\|_{lp,2} \leq 1\}, \quad (5.20)$$

On définit alors la *marge de stabilité robuste par rapport aux erreurs d'estimation* par le nombre $\alpha_m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha_m = \sup \{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \forall \tilde{\Delta} \in \underline{\mathbf{B}\Delta}_{CST}, \forall \Delta_\delta \in r \underline{\mathbf{B}\Delta}_{NL}, \mathcal{F}_u \left(N(s), \text{diag}(\tilde{\Delta}, \Delta_\delta) \right) \text{ est stable.} \} \quad (5.21)$$

α_m est représentatif de l'amplitude maximale que peut atteindre l'erreur d'estimation sans provoquer l'instabilité.

De plus, pour une marge de stabilité $\alpha = (1 - \epsilon)\alpha_m$ ($\epsilon > 0$ fixé) donnée, on souhaiterait aussi déterminer le plus petit nombre réel γ_{min} tel que

$$\gamma_{min} = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \forall \tilde{\Delta} \in \underline{\mathbf{B}\Delta}_{CST}, \forall \Delta_\delta \in \alpha \underline{\mathbf{B}\Delta}_{NL} \|\mathcal{F}_u \left(N(s), \text{diag}(\tilde{\Delta}, \Delta_\delta) \right)\|_{lip,2} \leq \gamma \} \quad (5.22)$$

5.4.3 Etude du schéma auto-adaptatif hors-ligne

La situation que l'on cherche à traiter correspond à celle décrite dans la partie 2.3.5 (page 50). Dans cette dernière, nous avons vu que pour analyser le schéma de la FIGURE 5.4 (page 115), les méthodes les plus adaptées (pour prendre en compte les non-linéarités) sont :

- le critère du cercle ;
- le théorème des petits gains.

Cependant, a priori, pour tout $i \in [1, n]$, les transferts $\delta\theta_i$ ne sont pas sans mémoire. En effet, l'estimateur étant un système avec mémoire, a priori il en est de même pour Δ_δ . Par conséquent, nous ne pouvons pas appliquer le critère du cercle au schéma de la FIGURE 5.4.

Il ne nous reste donc que le théorème des petits gains. Pour mettre en application ce dernier, découpons la matrice $N(s)$ en neuf sous-matrices, en suivant la séparation des entrées (w, f_3, d) et des sorties (z, e_3, p) réalisée dans le schéma de la FIGURE 5.4. Posons

$$N(s) = \begin{pmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) & N_{13}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) & N_{23}(s) \\ N_{31}(s) & N_{32}(s) & N_{33}(s) \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Afin de simplifier les notations, notons

$$M(s) = \begin{pmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Selon le théorème des petits gains, une condition *suffisante* pour que le schéma de la FIGURE 5.4 soit stable est que

$$\|\Delta_\delta\|_{lip,2} \leq \left(\left\| \mathcal{F}_u \left(M(s), \tilde{\Delta} \right) \right\|_\infty \right)^{-1} \quad (5.25)$$

Or, puisque l'on veut garantir la stabilité pour tout $\tilde{\Delta} \in \underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}_{CST}$, on cherche la plus grande valeur que peut avoir $\|\Delta_\delta\|_{lip,2}$ en respectant les conditions du théorème des petits gains. On arrive à la conclusion qu'il faut que

$$\|\Delta_\delta\|_{lip,2} \leq \min_{\tilde{\Delta} \in \underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}_{CST}} \left(\left\| \mathcal{F}_u \left(M(s), \tilde{\Delta} \right) \right\|_\infty \right)^{-1} \quad (5.26)$$

soit

$$\|\Delta_\delta\|_{lip,2} \leq \left(\max_{\tilde{\Delta} \in \underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}_{CST}} \left\| \mathcal{F}_u \left(M(s), \tilde{\Delta} \right) \right\|_\infty \right)^{-1} \quad (5.27)$$

Or

$$\max_{\tilde{\Delta} \in \underline{\mathbf{B}}\underline{\Delta}_{CST}} \left\| \mathcal{F}_u \left(M(s), \tilde{\Delta} \right) \right\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, +\infty[} \nu_{\underline{\Delta}_{CST}, \underline{\Delta}_{LTI}} (M(j\omega)) \quad (5.28)$$

où $\underline{\Delta}_{LTI}$ représente l'ensemble des transferts LTI non-structurés de la même dimension que Δ_δ . En définitive, une condition suffisante pour que le schéma de la FIGURE 5.4 soit stable pour tout $\tilde{\Delta} \in \underline{\Delta}_{CST}$, est que

$$\|\Delta_\delta\|_{lip,2} \leq \left(\sup_{\omega \in [0, +\infty[} \nu_{\underline{\Delta}_{CST}, \underline{\Delta}_{LTI}} (M(j\omega)) \right)^{-1} \quad (5.29)$$

On obtient donc une borne inférieure de la marge de stabilité robuste par rapport aux erreurs d'estimation, avec

$$\alpha_m \geq \left(\sup_{\omega \in [0, +\infty[} \nu_{\underline{\Delta}_{CST}, \underline{\Delta}_{LTI}} (M(j\omega)) \right)^{-1} \quad (5.30)$$

Si on a pu obtenir une minoration de la marge de stabilité robuste en faisant attention de prendre en compte le caractère non-linéaire de Δ_δ , il est plus délicat de proposer une majoration de la performance. On peut cependant se faire une idée de cette performance en traitant le cas où Δ_δ est LTV, et proposer une majoration de γ_{min} dans l'équation (5.22). Pour se faire, on peut utiliser la Robust Feedforward Design Toolbox (RFDT)[30] qui permet, entre autres, de déterminer une borne supérieure de γ_{min} lorsque Δ_δ est LTV. Les algorithmes utilisés dans cette boîte à outils sont expliqués dans le Chapitre 2.4 (page 56).

5.4.4 Conclusion de l'analyse

Après avoir mis le schéma de la boucle fermée sous forme LFT, la marge de stabilité robuste et la performance ont été définies. On a alors pu proposer une minoration pour la marge de stabilité robuste, mais pas de majoration pour la performance. A défaut, il a été proposé une méthode pour calculer une majoration de la performance dans le cas où Δ_δ est LTV.

De plus, il est important de noter que la borne sur Δ_δ a été obtenue avec la norme $\|\cdot\|_{lip,2}$. Par conséquent, le résultat obtenu ne correspond pas à une simple majoration de l'amplitude de l'erreur d'estimation, il s'agit d'une condition plus contraignante. En effet, il ne suffit pas d'avoir une erreur d'estimation inférieure à α_m pour garantir que $\|\Delta_\delta\|_{lip,2} \leq \alpha_m$, et donc pour garantir la stabilité. A priori, cette méthode présente donc l'inconvénient que le résultat de l'analyse reste difficile à interpréter pour élaborer des contraintes sur l'estimateur.

5.5 Choix d'un estimateur

Le procédé étant mis sous forme LFT, le correcteur LFT ayant été synthétisé, une condition sur la fonction de transfert Δ_δ a été obtenue pour garantir la stabilité du schéma adaptatif. Il faut donc maintenant *choisir un estimateur*. Dans cette section, on cherchera à synthétiser un estimateur à partir des éléments obtenus lors de l'analyse.

5.5.1 Estimation de la représentation d'état structurée

Pour l'estimation, on considère que l'on mesure l'état du système. Soit $(A(\theta), B(\theta), I, 0)$ une représentation d'état de $H(s, \theta)$ de la FIGURE 1.5.

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= x \end{cases} \quad (5.31)$$

La dérivée de l'état est reconstruite à l'aide d'un filtre passe-bande $\left[\frac{1}{D(s)}\right]$. Ainsi, en notant $x_f = \left[\frac{1}{D(s)}\right] x$; $u_f = \left[\frac{1}{D(s)}\right] u$ et $\dot{x}_f = \left[\frac{s}{D(s)}\right] x$, alors l'équation

$$\dot{x}_f = Ax_f + Bu_f \quad (5.32)$$

peut être écrite sous la forme

$$\beta(t) = \Omega^T \phi(t) \quad (5.33)$$

avec $\beta(t) = \dot{x}_f$, $\phi(t)^T = [x_f(t)^T, u_f(t)^T]$ et $\Omega^T = [A, B]$. Par conséquent, en supposant que tous les θ_i sont des composantes de la matrice Ω , l'estimation de θ peut être obtenue par celle de Ω . Autrement dit, pour tout i , il existe l_i et m_i tels que $\theta_i = \Omega_{l_i, m_i}$, où Ω_{l_i, m_i} est la composante de la l_i -ème ligne et m_i -ème colonne de la matrice Ω .

5.5.2 Prise en compte des conditions établies lors de l'analyse

Dans la partie précédente, nous avons établi qu'une condition *suffisante* pour garantir la stabilité du schéma de la FIGURE 5.4 était que

$$\|\Delta_\delta\|_{lip,2} \leq \left(\sup_{\omega \in [0, +\infty[} \nu_{\underline{\Delta}_{CST}, \underline{\Delta}_{LTI}}(M(j\omega)) \right)^{-1} \quad (5.34)$$

Et une condition *nécessaire* pour respecter l'équation précédente est d'avoir

$$\forall i \in [1, n], \quad \|\delta\theta_i\|_2 \leq \left(\sup_{\omega \in [0, +\infty[} \nu_{\underline{\Delta}_{CST}, \underline{\Delta}_{LTI}}(M(j\omega)) \right)^{-1} \quad (5.35)$$

Ce qui nous amène à conclure qu'une condition nécessaire pour respecter l'équation (5.34) est qu'il faut majorer l'erreur d'estimation.

Or, pour réaliser l'estimation, on trouve dans la littérature scientifique deux familles d'algorithme :

- estimateur des moindres carrés (Cf. 4.3 page 88) ;
- estimateur à erreur bornée (Cf. 4.4 page 95).

L'estimateur des moindres carrés présente l'avantage d'être facile à mettre en œuvre. Cependant, l'utilisation de cet algorithme suppose que le bruit auquel est soumis l'estimateur (la quantité w de l'équation (4.27) page 90) est dé-corrélé du signal du régresseur, et dans le cas contraire, il faut blanchir ce bruit. Or a priori, le régresseur et le bruit de mesure sont corrélés. En effet, le bruit auquel est soumis l'estimateur intervient aussi au sein du régresseur, et peut donc être corrélé avec ce dernier. De plus, les informations que l'on peut recueillir sur l'erreur d'estimation sont d'ordre statistique, et il est malaisé, à partir de celles-ci, de garantir une majoration de l'erreur d'estimation.

En revanche, l'estimateur à erreur bornée ne fait pas d'hypothèse sur la « couleur » du bruit w (Cf. équation (4.72), page 95), mais uniquement sur son amplitude. Et si ces hypothèses sont respectées, l'estimateur permet de

garantir une majoration sur l'erreur d'estimation. Or cette situation correspond d'avantage au cas que l'on cherche à traiter. En effet, le bruit auquel est soumis l'estimateur n'est pas blanc, mais il paraît raisonnable de chercher à en donner une majoration.

Aussi, pour réaliser l'estimation, on choisit donc d'utiliser l'algorithme d'estimation à erreur bornée.

5.5.3 Conclusion sur le choix de l'estimateur

L'algorithme de l'« estimateur des moindres carrés » ne permet pas de borner facilement l'erreur d'estimation. Par conséquent, on considère que l'estimateur le plus adapté pour le schéma adaptatif est l'« estimateur à erreur borné ».

Cependant, comme on l'a noté précédemment, borner l'erreur d'estimation ne suffit pas a priori pour garantir la stabilité de la boucle fermée adaptative. En effet, pendant la phase d'analyse, on a obtenu une borne supérieure sur $\|\Delta_\delta\|_{lip,2}$, alors que borner uniquement la valeur de l'erreur d'estimation revient à borner $\|\Delta_\delta\|_2$. Il apparaît donc qu'il faudrait compléter cette étude dans l'objectif de tirer meilleur profit des informations fournies par la norme $\|\cdot\|_{lip,2}$, afin de proposer un estimateur garantissant la stabilité du schéma adaptatif.

Chapitre 6

Application au modèle linéarisé d'un avion

6.1 Présentation de l'application

L'avion qui a été choisi pour l'application est le VELA1 qui est un avion à fuselage intégré et développé dans le cadre du projet européen VELA (Very Efficient Large Aircraft). Les données et modèles utilisés pour cette application sont issus de [31]. Les principales caractéristiques de l'avion sont les suivantes :

Masse de l'avion	M	\in	$[550; 770]$	t
Surface de référence	S	$=$	2012	m^2
Corde Moyenne Aérodynamique	l	$=$	35.93	m
Envergure	b	$=$	99.60	m

En notant :

$$\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2, \quad b_1 = \frac{\bar{q}S}{MV}, \quad b_2 = \frac{\bar{q}Sl}{I_{yy}}, \quad \epsilon = b_1 \frac{l}{V} C_{L_q} \quad (6.1)$$

et :

- ρ : Masse volumique de l'air
- V : Vitesse aérodynamique de l'avion
- I_{yy} : Moment d'inertie
- C_L : Coefficient (aérodynamique) de portance
- C_m : Coefficient (aérodynamique) de moment selon l'axe y de l'avion

avec :

$$C_{L_q} = \frac{\partial C_L}{\partial q}; \quad C_{L_\alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}; \quad (6.2)$$

$$C_{m_\alpha} = \frac{\partial C_m}{\alpha}; \quad C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{q}; \quad C_{m_{\delta_m}} = \frac{\partial C_m}{\delta_m} \quad (6.3)$$

Il est proposé un modèle longitudinal par représentation d'état dans [31]. Notamment, (page 20) on peut trouver un modèle du mode de l'*oscillation d'incidence*. En notant (α) l'angle d'incidence et (q) la vitesse de tangage, et en considérant que les élévateurs gauche et droit bougent ensemble, le modèle suivant est proposé :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 C_{L_\alpha} & 1 - \epsilon \\ b_2 C_{m_\alpha} & b_2 \frac{l}{V} C_{m_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 C_{L_{\delta_m}} \\ b_2 C_{m_{\delta_m}} \end{pmatrix} \delta_m \quad (6.4)$$

δ_m est la position angulaire des élévateurs. (Voir [31] pour plus de précision.)

Dans [2], on considère ce modèle linéarisé longitudinal dans une configuration instable (le centre de gravité en position « arrière » et l'avion en basse vitesse), avec $\epsilon = 0$. Le modèle est défini par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & M_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_u \\ M_u \end{pmatrix} \delta_m \quad (6.5)$$

Pour faire bouger l'élévateur, un actionneur est utilisé. Tout comme dans [31] (pages 36 – 37), on utilise un modèle simplifié de cet actionneur :

$$Act(s) = H_{act}(s) = \frac{1}{1 + T_{act}s} \quad \text{avec} \quad T_{act} = 0.06 \text{ rad.s}^{-1} \quad (6.6)$$

Le modèle de l'aéronef est caractérisé par cinq constantes paramétriques : $Z_\alpha, Z_u, M_\alpha, M_q$ et M_u . Soient $Z_{\alpha 0}, Z_{u 0}, M_{\alpha 0}, M_{q 0}$ et $M_{u 0}$ leur valeur nominale respective. On suppose que les paramètres $M_\alpha, M_u, Z_\alpha, Z_u$ et M_q sont connus avec une incertitude de 30%. Toutes les incertitudes sont normalisées entre -1 et 1 , pour appliquer les outils de la robustesse.

Les valeurs numériques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Z_{\alpha 0} &= -0.4831 \text{ s}^{-1} \\ Z_{u 0} &= -0.0578 \text{ s}^{-1} \\ M_{\alpha 0} &= 0.9806 \text{ s}^{-2} \\ M_{q 0} &= -0.6830 \text{ s}^{-1} \\ M_{u 0} &= -1.0698 \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

et les angles sont en degré.

6.1.1 Etude de la boucle ouverte

La position des pôles en boucle ouverte (avion naturel et actionneur) est donnée par la FIGURE 6.1 et le tableau suivant :

Oscillation d'incidence	0.3676 −1.5337
Pôle actionneur	−16.6667
Somme	−17.8328

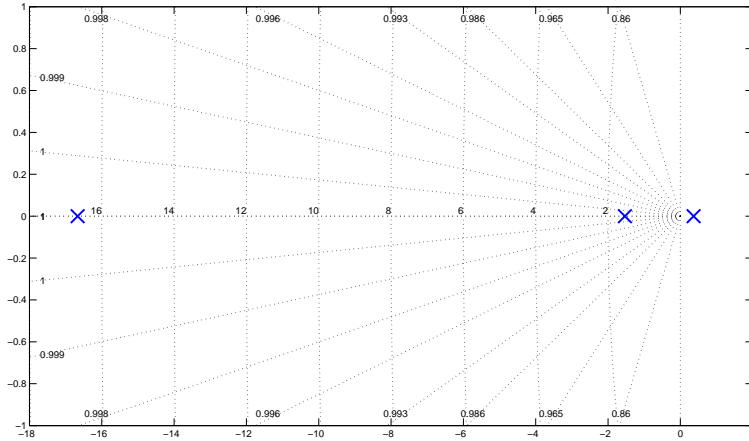


FIGURE 6.1 – Position des pôles en boucle ouverte.

La boucle ouverte est instable et donc un correcteur pour stabiliser l'avion est indispensable.

6.1.2 Cahier des charges

Dans cette application, on se donne pour objectif d'*asservir l'angle d'incidence* (α) de l'avion.

Bien souvent, la synthèse d'un correcteur est réalisée en prenant en considération le cahier des charges du MIL [64]. On pourra consulter [64] et [73] pour plus détails sur les spécifications à respecter. Pour cette application, on se fixe les contraintes suivantes :

1. la boucle fermée doit être stable.
2. les pôles du mode de l'oscillation d'incidence doivent être positionnés selon les spécifications d'où l'exemple est tiré, à savoir : amortissement à 0.7 et pulsation à 0.8 rad.s^{-1} (cf. [31] page 45.).

Il s'agira de respecter la contrainte de stabilité de manière stricte, et on s'efforcera de respecter la contrainte sur la position des pôles pour « des

temps très grands », en considérant que l'on ne mesure que α et q (cadre de la thèse).

6.2 Synthèse d'un correcteur non séquenté

Dans cette partie, on cherche à synthétiser un correcteur non-séquenté pour stabiliser l'oscillation d'incidence.

6.2.1 Synthèse sans intégrateur

On cherche à synthétiser un correcteur statique stabilisant K . Le schéma de la boucle fermée peut être représenté par la Figure 6.2. Le procédé que l'on

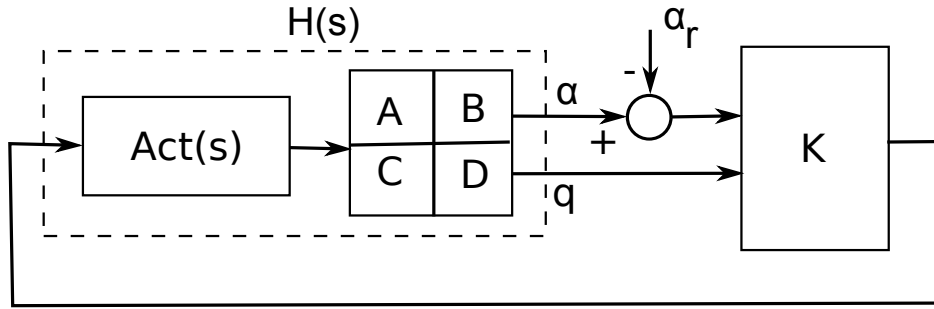


FIGURE 6.2 – Schéma de la boucle fermée avec un correcteur statique non-séquenté.

étudie (le mode d'oscillation d'incidence de l'avion naturel et son actionneur : $H(s)$) possède deux sorties (α, q) . Par conséquent, on ne peut positionner que deux pôles. Or puisque le correcteur est statique, le nombre de pôle en boucle fermée est le même qu'en boucle ouverte. Il y aura donc aussi trois pôles en boucle fermée. Le positionnement de deux pôles conditionne le positionnement du troisième. L'équation différentielle de la représentation d'état de $H(s)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_u \\ M_\alpha & M_q & M_u \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_{act}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \\ \delta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_{act}} \end{pmatrix} u_c \quad (6.7)$$

En notant $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ la représentation d'état de $H(s)$, on peut noter que dans notre situation particulière, on a

$$\left\| \frac{\partial}{\partial K} (tr(BKC)) \right\| = \|B^T C^T\| = 0 \quad (6.8)$$

On en déduit donc que

$$tr(A + BKC) = [tr(A + BKC)]_{K=0} = tr(A) \quad (6.9)$$

La matrice A possède trois pôles (réels) distincts et est de dimension trois. Par conséquent, A est diagonalisable (dans \mathbb{R} donc dans \mathbb{C}), et il existe P et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, tels que $A = P^{-1}DP$. Et puisque que la trace est invariante par changement de base, on a :

$$tr(A) = tr(D) = \sum_i \lambda_i \quad (6.10)$$

Dans notre situation particulière, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 9 *Si la boucle fermée possède des valeurs propres distinctes, alors leur somme est indépendante de K et égale celle en boucle ouverte.*

Pour respecter les contraintes du MIL, et ne pas perturber le pilote, on cherche à reconstituer un mode d'*oscillation d'incidence* oscillant. Donc au moins un des pôles que l'on placera est complexe. Cependant, il est préférable de choisir le deuxième pôle comme le complexe conjugué du premier. Dans le cas contraire, on prend le risque que K soit complexe.

En effet, on a toujours :

$$\lambda_3 = tr(A) - \lambda_1 - \lambda_2 \quad (6.11)$$

En choisissant $\lambda_2 \neq \overline{\lambda_1}$, deux cas peuvent se présenter :

1. $\lambda_2 = tr(A) - 2Re(\lambda_1)$ (donc $\lambda_3 = \overline{\lambda_1}$), et alors K est réel.
2. $\lambda_2 \neq tr(A) - 2Re(\lambda_1)$ et $\lambda_2 \neq \overline{\lambda_1}$, et alors ni λ_2 ni λ_3 ne sont conjugués de λ_1 , et puisque A , B et C sont réels, la seule possibilité est d'avoir K complexe.

Compte tenu que l'on a que $tr(A) = \sum_i \lambda_i$, et que l'on place λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, pour garantir la stabilité, on trouve les contraintes suivantes :

$$Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0 \quad (6.12)$$

$$Re(\lambda_3) = tr(A) - Re(\lambda_1) - Re(\lambda_2) < 0 \quad (6.13)$$

Ce qui donne

$$0 > \text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > \frac{\text{tr}(A)}{2} \approx -8.9164 \text{ rad.s}^{-1} \quad (6.14)$$

Ce qui laisse une très grande marge par rapport au cahier des charges. On choisit de positionner les pôles de la manière suivante :

Pulsation (ω_n)	0.8 rad.s^{-1}
Amortissement (ξ)	0.7

$$\lambda_1 = \omega_n \left(-\xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (6.15)$$

$$\lambda_2 = \omega_n \left(-\xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (6.16)$$

$$(6.17)$$

et il en découle (selon (6.11)) que

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \text{tr}(A) + 2 \times \xi \omega_n = -17.8328 + 2 \times 0.7 \times 0.8 \\ \lambda_3 &= -16.7128 \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned} \quad (6.18)$$

La position des pôles en boucle fermée peut être observée sur la FIGURE 6.3. De plus, la réponse indicielle de la boucle fermée peut être observée sur la FIGURE 6.4. En observant les réponses indicielles, nous constatons que l'erreur statique est non nulle. Ce qui est une non-conformité à notre cahier des charges.

6.2.2 Synthèse avec intégrateur pour annuler l'erreur statique

Pour corriger cette non-conformité, un intégrateur est ajouté pour annuler l'erreur statique. Pour se convaincre que cette stratégie permet effectivement d'atteindre l'objectif souhaité, on pourra par la suite examiner l'équation (6.21), qui est l'équation différentielle de la boucle fermée, et observer que la troisième ligne correspond à : $\dot{a}_i = \alpha - \alpha_r$. Or, lorsque $(t \rightarrow \infty)$, si la boucle fermée est stable, on a $\dot{a}_i \rightarrow 0$, d'où $|\alpha - \alpha_r| \rightarrow 0$.

Le nouveau schéma de commande est représenté sur la FIGURE 6.5. Contrairement à précédemment, le procédé sur lequel la synthèse sera réalisée ($H_1(s)$) n'est plus uniquement constitué de l'avion natuel et de l'actionneur, mais inclura

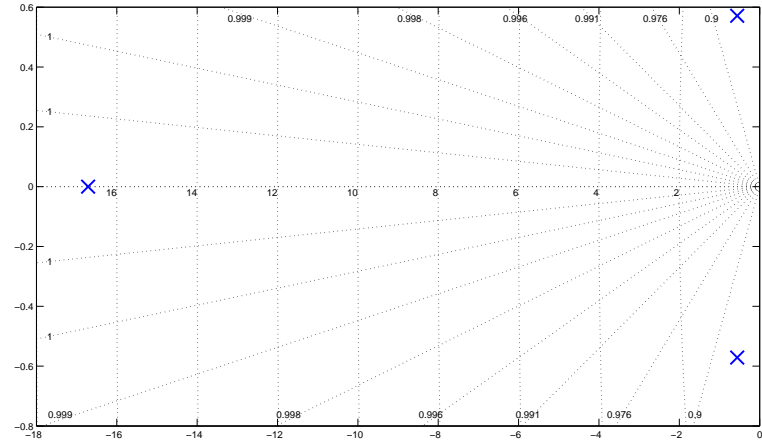


FIGURE 6.3 – Position des pôles en boucle fermée, avec un correcteur statique non séquenté.

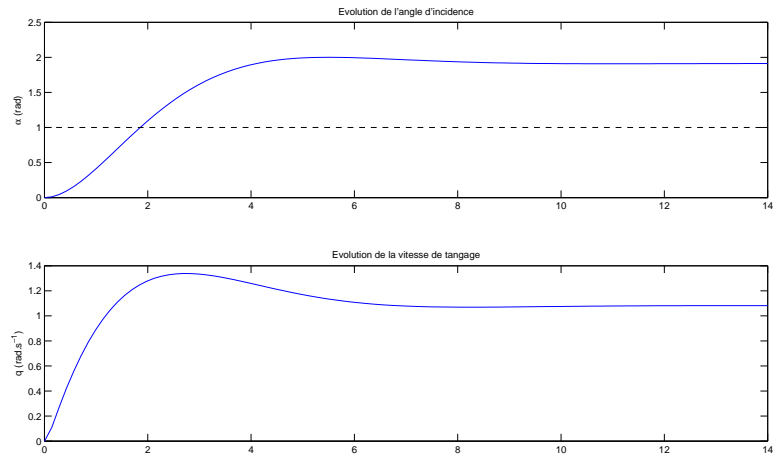


FIGURE 6.4 – Position des pôles en boucle fermée.

aussi un intégrateur sur α , comme représenté sur la FIGURE 6.5. En notant

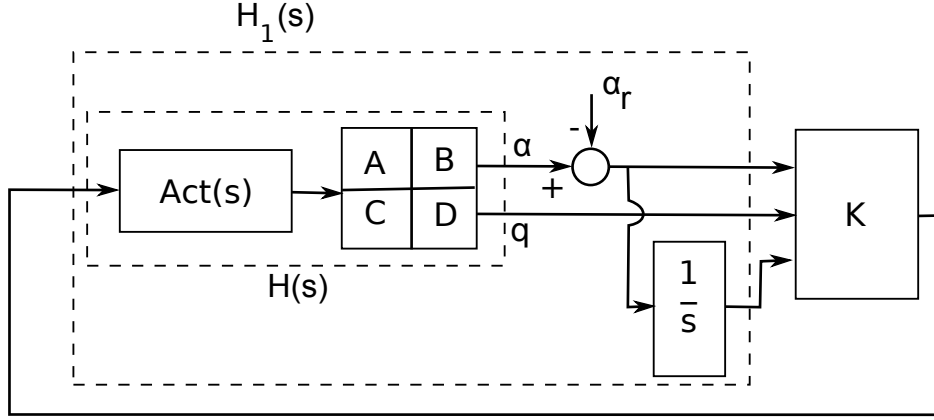


FIGURE 6.5 – Schéma de la boucle fermée.

$\left[\begin{array}{c|c} A_{wi} & B_{wi} \\ \hline C_{wi} & D_{wi} \end{array} \right]$, la représentation d'état de $(H_1(s))$, les équations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{a}_i \\ \dot{\delta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\alpha & 1 & 0 & Z_u \\ M_\alpha & M_q & 0 & M_u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_{act}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \\ a_i \\ \delta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_{act}} \end{pmatrix} u_c \quad (6.19)$$

$$C_{wi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D_{wi} = 0 \quad (6.20)$$

On peut aussi constater que l'on a $\|B_{wi}^T C_{wi}^T\| = 0$, et la proposition 9 est valable ici et par conséquent $\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A_{wi})$ en boucle ouverte comme en boucle fermée.

$H_1(s)$ possède trois sorties. On peut donc positionner trois pôles. Si les deux premiers pôles sont complexes conjugués, il est préférable que le troisième pôle soit réel pour avoir un correcteur réel. L'équation différentielle de la représentation d'état de la boucle fermée est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{a}_i \\ \dot{\delta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\alpha & 1 & 0 & Z_u \\ M_\alpha & M_q & 0 & M_u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_\alpha}{T_{act}} & \frac{K_q}{T_{act}} & \frac{K_I}{T_{act}} & \frac{1}{T_{act}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \\ a_i \\ \delta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{K_\alpha}{T_{act}} \end{pmatrix} \alpha_r \quad (6.21)$$

On choisit de placer le troisième pôle de la manière suivante :

$$\lambda_3 = -0.7 * 0.8 = -0.56 \text{ rad.s}^{-1} \quad (6.22)$$

La position des pôles en boucle fermée est donnée par la FIGURE 6.6, et la réponse indicielle par la FIGURE 6.7, où l'on peut constater qu'effectivement l'erreur statique a été annulée.

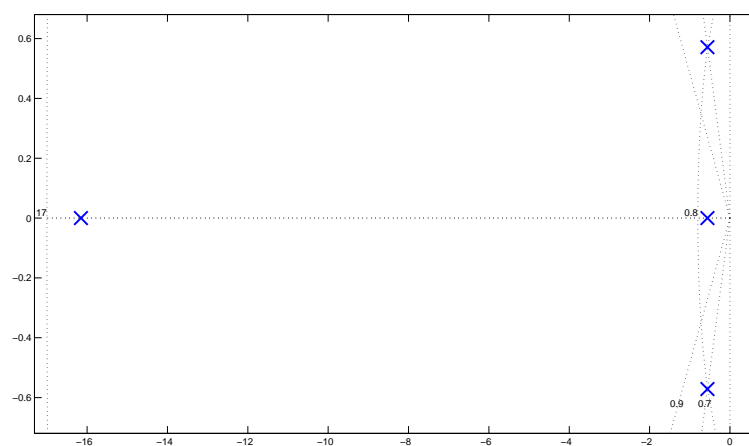


FIGURE 6.6 – Position des pôles en boucle fermée.

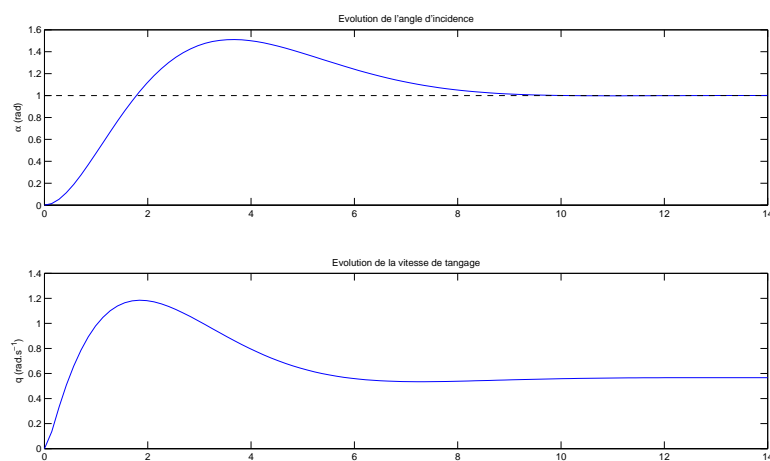


FIGURE 6.7 – Position des pôles en boucle fermée.

6.2.3 Influence d'une incertitude sur les paramètres

Jusque là, nous avons considéré que le point de vol de l'avion était parfaitement connu, et nous avons synthétisé le correcteur sur cette base. Cependant, lorsque le correcteur intervient pendant la phase de vol pour laquelle il a été synthétisé, les matrices ne sont pas forcément connues avec autant de précision. Dans cette partie, nous étudierons comment la boucle fermée est influencée lorsque le correcteur est appliqué à un point de vol différent de celui sur lequel il a été synthétisé. Pour se faire, on se concentrera principalement sur une incertitude sur la vitesse de l'avion. Les évolutions suivantes sont observées lorsque la vitesse varie de $\pm 50\%$, autour de $Mach = 0.2$.

Sur la FIGURE 6.8, on peut observer l'évolution (en %) des éléments de la matrice A de la représentation d'état du mode de l'oscillation d'incidence de l'avion considéré. Le paramètre le plus impacté est M_α dont l'amplitude relative d'évolution est aussi importante que celle de la vitesse.

Sur la FIGURE 6.9, on peut observer l'évolution de la position des pôles

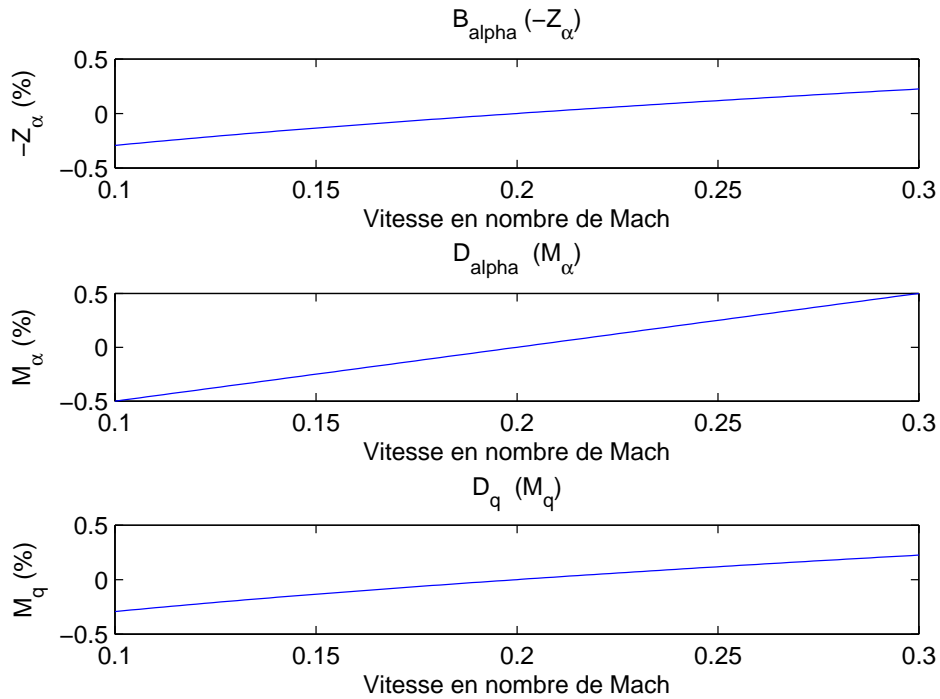


FIGURE 6.8 – Evolution des éléments de la matrice A en fonction de la vitesse.

avec la vitesse. Pour ce graphe, les pôles les « plus bleus » correspondent aux

vitesses les plus basses, et les pôles les « plus rouges » aux vitesses les plus élevées.

Sur la FIGURE 6.10, on peut observer l'évolution des réponses indicielles

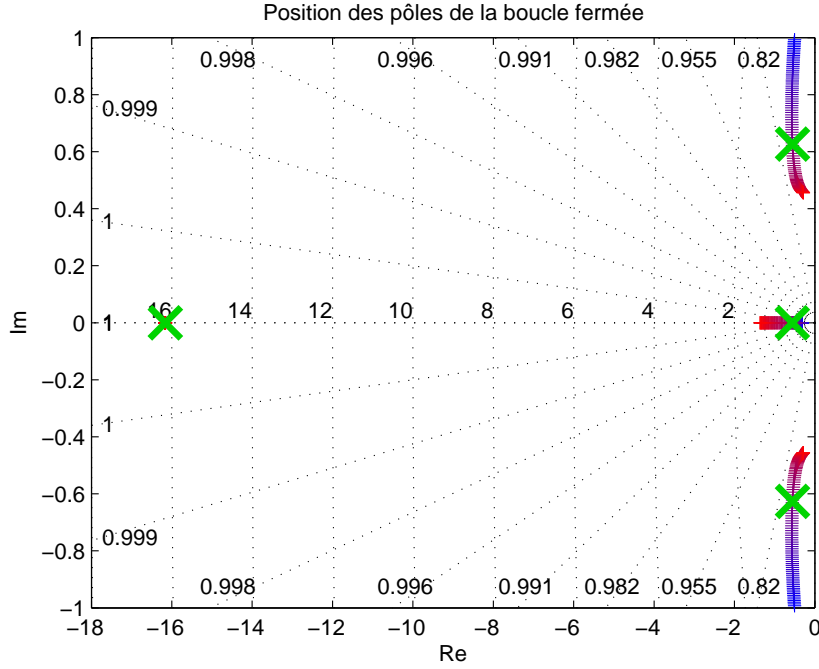


FIGURE 6.9 – Evolution de la position des pôles avec la vitesse. En bleu, les positions obtenues avec une vitesse plus faible, et en rouge celles obtenues avec une vitesse plus élevée. Les pôles en vert correspondent à $Mach = 0.2$

avec la vitesse. Pour ce graphe, les réponses indicielles les « plus bleus » correspondent aux vitesses les plus basses, et les réponses les « plus rouges » aux vitesses les plus élevées.

De la FIGURE 6.10, on en déduit la FIGURE 6.11 où l'on peut observer l'évolution du dépassement maximal avec la vitesse.

On en déduit qu'avec une incertitude sur la vitesse de l'avion, et un correcteur statique, les performances (principalement le dépassement) évoluent au point d'être très éloignées des performances souhaitées. Aussi, dans la situation que l'on cherche à traiter dans cette thèse, où l'on ne disposerait que des mesures de α et q , une adaptation du correcteur semble indispensable pour maintenir un même niveau de performance.

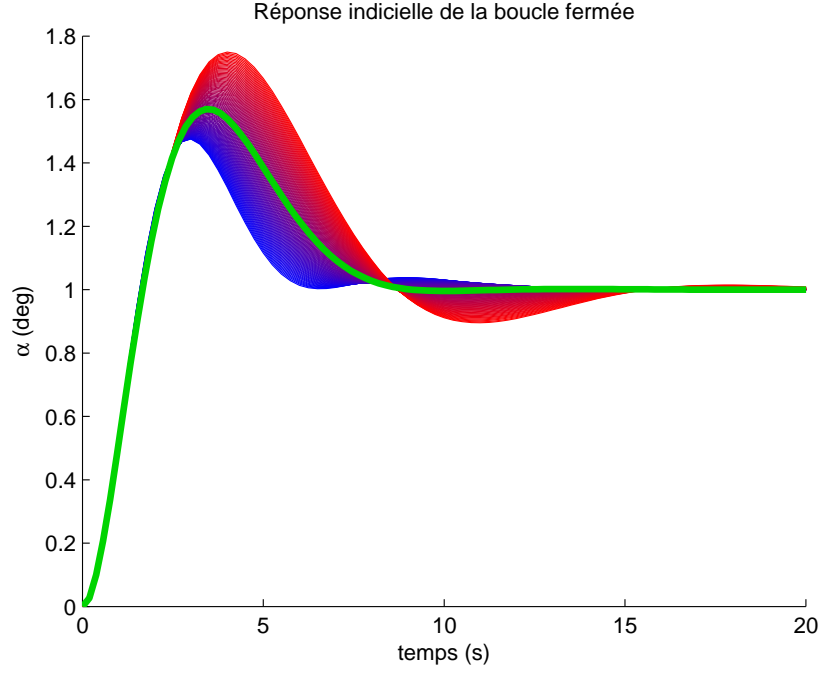


FIGURE 6.10 – Evolution des réponses indicielles en boucle fermée avec la vitesse. En bleu, les réponses obtenues avec une vitesse plus faible, et en rouge celles obtenues avec une vitesse plus élevée. La réponse en vert correspond à $Mach = 0.2$

6.3 Justification du choix des paramètres de séquençement

Afin de mettre en évidence les paramètres dominants, on peut tout d'abord réaliser une analyse de la pulsation propre du mode longitudinal de l'avion naturel :

$$\omega_p^2 = Z_\alpha M_q - M_\alpha \quad (6.23)$$

En considérant les valeurs nominales du modèle, on note que $\left| \frac{Z_\alpha M_q}{M_\alpha} \right| \simeq 0.3$. Par conséquent, le terme M_α est dominant dans l'expression de la pulsation propre.

Pour choisir les paramètres de séquençement, on cherche à observer leur influence sur le positionnement des pôles de la boucle fermée (qui est notre critère de synthèse). Posons

$$\vec{v}_{par} = (Z_\alpha, Z_u, M_\alpha, M_q, M_u)^T \quad (6.24)$$

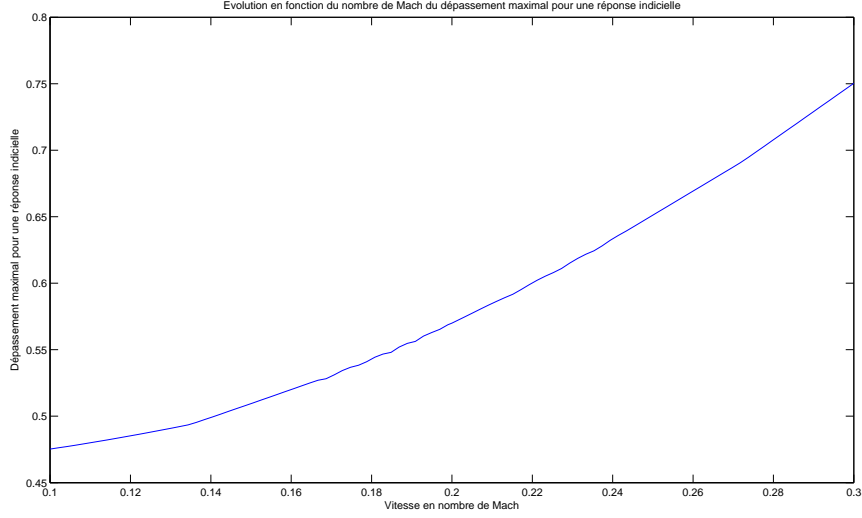


FIGURE 6.11 – Evolution du dépassement maximal en fonction de la vitesse.

La boucle fermée possède quatre valeurs propres que l'on peut noter $\lambda_i(\vec{v}_{par})$ pour tout $i \in [1, 4]$. Soit $\vec{v}_{par0} = (Z_{\alpha0}, Z_{u0}, M_{\alpha0}, M_{q0}, M_{u0})^T$. Il existe un voisinage $\Omega (\subset \mathbb{R}^5)$ tel que pour tout $i \in [1, 4]$, $\lambda_i(\vec{v}_{par})$ est une fonction continue et infiniment dérivable de \vec{v}_{par} . On définit

$$\Lambda(\vec{v}_{par}) = (\lambda_1(\vec{v}_{par}), \lambda_2(\vec{v}_{par}), \lambda_3(\vec{v}_{par}), \lambda_4(\vec{v}_{par}), \lambda_5(\vec{v}_{par}))^T \quad (6.25)$$

et

$$J(\vec{v}_{par}) = \|\Lambda(\vec{v}_{par}) - \Lambda(\vec{v}_{par0})\|_2 \quad (6.26)$$

On constate que pour une même plage de variation relative des paramètres, l'influence de chacun d'eux sur la variation de la position des pôles n'est pas la même. On peut alors établir un classement du plus influent au moins influent : $(M_u, M_\alpha, M_q, Z_\alpha, Z_u)$. Par la suite, nous choisirons donc les paramètres de séquençement dans cet ordre.

6.4 Synthèse du correcteur auto-séquéncé

On réalise tout d'abord une synthèse sur le modèle (« non-transformé ») décrit par l'équation (6.19). Mais, pour le correcteur obtenu, le calcul de la marge de stabilité par des méthodes de μ -analyse ne permettent pas de conclure sur la stabilité de la boucle fermée adaptative. On réalise alors la

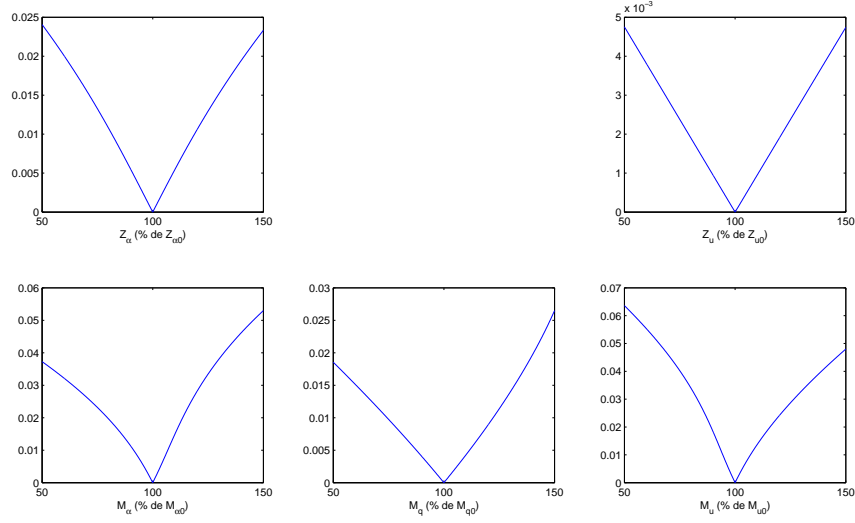


FIGURE 6.12 – Evolution de $\left| \frac{J(\vec{v}_{par}) - J(\vec{v}_{par0})}{J(\vec{v}_{par0})} \right|$ en fonction de l'évolution de chacun des paramètres.

synthèse sur un modèle « pire-cas » décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = q \\ \dot{q} = M_{\alpha}\alpha + \eta \end{cases} \quad (6.27)$$

avec l'entrée normalisée $\eta = M_u\delta_m$. En effet, en examinant le procédé « non-transformé », on obtient les expressions analytiques suivantes des pôles en boucle ouverte :

$$\lambda_{1,nt} = \frac{1}{2} \left\{ Z_{\alpha} + M_q + \sqrt{(Z_{\alpha} + M_q)^2 + 4(M_{\alpha} - Z_{\alpha}M_q)} \right\} \quad (6.28)$$

$$\lambda_{2,nt} = \frac{1}{2} \left\{ Z_{\alpha} + M_q - \sqrt{(Z_{\alpha} + M_q)^2 + 4(M_{\alpha} - Z_{\alpha}M_q)} \right\} \quad (6.29)$$

Alors que les pôles du modèle « pire-cas » sont :

$$\lambda_{1,wc} = \sqrt{M_{\alpha}} \quad (6.30)$$

$$\lambda_{2,wc} = -\sqrt{M_{\alpha}} \quad (6.31)$$

Avec les valeurs nominales, nous avons :

$$\max(\lambda_{1,nt}, \lambda_{2,nt}) \leq \max(\lambda_{1,wc}, \lambda_{2,wc}) = \sqrt{M_{\alpha}} \quad (6.32)$$

On peut donc s'attendre à ce qu'un correcteur stabilisant le procédé « pire-cas » stabilisera le procédé « non-transformé ». Le schéma de la boucle fermée est représenté sur la FIGURE 6.13.

Afin de conserver la même fréquence pour les valeurs propres des boucles

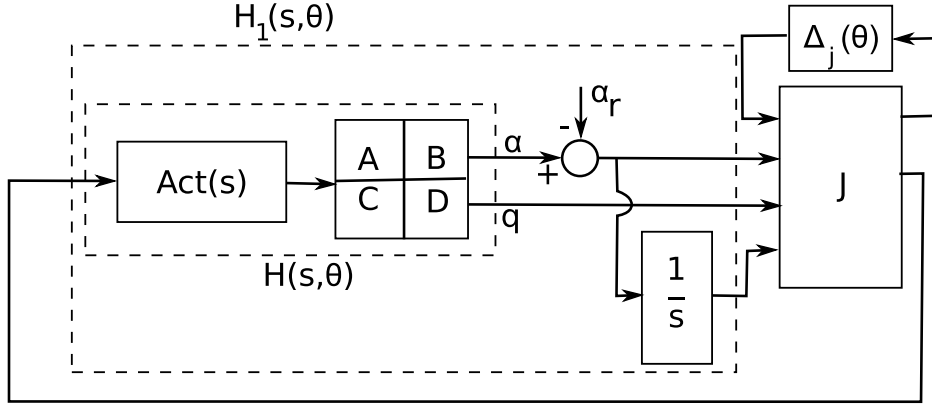


FIGURE 6.13 – Schéma utilisé pour la synthèse du gain LFT.

ouverte et fermée, on réalise une approximation affine de M_α par rapport à ω_p :

$$\omega_p = a \times M_\alpha + b \quad (6.33)$$

avec a et b fixés. On obtient $a = 0.5088 \text{ s}$, et $b = 0.4871 \text{ rad.s}^{-1}$

Puisqu'il y a trois sorties, on peut assigner trois valeurs propres. On choisit de les placer de la manière suivante :

$$\lambda_1(M_\alpha) = \left(-\xi_1 + j\sqrt{1 - \xi_1^2} \right) \omega_p \quad (6.34)$$

$$\lambda_2(M_\alpha) = \left(-\xi_1 - j\sqrt{1 - \xi_1^2} \right) \omega_p \quad (6.35)$$

$$\lambda_3(M_\alpha) = -\xi_1 \omega_p \quad (6.36)$$

avec un facteur d'amortissement de $\xi_1 = 0.7$. Puis, un gain LFT est synthétisé avec la fonction `fb_sched` de la Linear Fractional Representation Toolbox (LFRT) [53].

On synthétise un correcteur statique $J(M_\alpha) = \mathcal{F}_u(J_{aug}, M_\alpha I_4)$ sur le modèle pire-cas décrit par l'équation (6.27), avec $J_{aug} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$. Comme expliqué dans la section 3.2.5 (page 80), afin de garantir le bien-posé du correcteur, on calcule une borne supérieure de $\mu(J_{11})$, et on obtient $\mu(J_{11}) <$

$9.31 \times 10^{-4} < 1$, donc $J(M_\alpha)$ est bien-posé.

Le correcteur final entre (α, q) et (u) est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{F}_u(K_{aug}(s), \Delta_k(\theta)) = \frac{1}{M_u} \times J(M_\alpha) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

6.5 Analyse de la robustesse

6.5.1 La stabilité robuste

Suivant la procédure décrite dans 5.4 (page 113), on obtient la boucle fermée de la FIGURE 5.4 (page 115). Pour les valeurs vraies variant de $\pm 30\%$, on calcule une borne inférieure de sa marge de stabilité robuste, et l'on obtient $\alpha_m \geq 35\%$. En d'autres termes, si la fonction de transfert de l'erreur d'estimation relative Δ_δ était une fonction de transfert LTV (ce qu'elle n'est pas) et si elle n'excédait pas 35% de la valeur nominale du paramètre alors la stabilité de la boucle fermée serait assurée, même pendant le régime transitoire. Ici, si cette marge ne permet pas de garantir la stabilité de la boucle fermée auto-adaptative, elle permet d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de l'erreur d'estimation admissible pour garantir la stabilité du régime transitoire.

De plus, afin de montrer la richesse de la méthode [30], les résultats considérant différents types de variation des paramètres (θ) et des erreurs d'estimation ($\delta\theta$) sont présentés dans la TABLE 6.1.

TABLE 6.1 – Bornes inférieures de α_m . TI = Time Invariant ; TV = Time Varying

θ	$\delta\theta$	Une borne inférieure de α_m
TI	TI	55%
TI	TV	35%
TV	TV	22%

6.5.2 Performance L_2 Robuste

De plus, pour une erreur relative maximale autorisée donnée ($\leq 35\%$), on peut calculer la valeur garantie (équation (5.22) page 116) de γ de la

norme L_2 induite de la matrice de transfert entre $d = \alpha_r$ (α_r étant le signal de consigne représenté sur la FIGURE 6.13) et $p = \alpha$. La FIGURE 6.14 montre l'évolution de cette norme par rapport à l'erreur d'estimation relative maximale autorisée. Là encore, même si ces valeurs sont obtenues en faisant l'hypothèse d'un système LTV, elles permettent d'avoir une idée des ordres de grandeur dans le cas auto-adaptatif (non-linéaire).

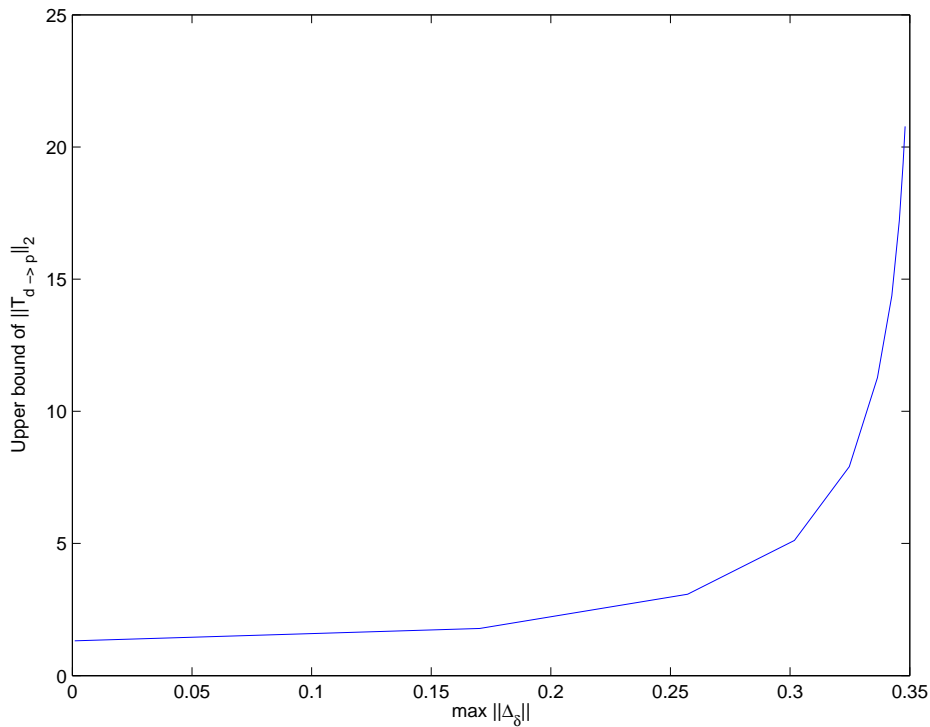


FIGURE 6.14 – Variation de la borne supérieure de la norme L_2 induite du transfert du canal de performance, en fonction de la norme $\|\cdot\|_2$ du transfert de l'erreur d'estimation relative (Δ_δ) maximale autorisée, en supposant que cette dernière est LTV.

6.6 Synthèse de l'estimateur

Tout d'abord, il est important de rappeler que l'on cherche à estimer des *paramètres constants*. Il n'y a donc pas de problème de *poursuite de paramètre*. Ensuite, dans le cadre traité par cette thèse, on cherche à garantir la stabilité par le fait que l'erreur d'estimation reste « suffisamment petite ». Ces deux éléments indiquent que dans le cadre traité par cette thèse, la vitesse

de convergence ne conditionne pas la stabilité. En revanche, cet élément peut être pris en considération pour la performance du correcteur auto-adaptatif.

L'estimateur des moindres carrés ne permet pas de garantir qu'à chaque instant la valeur estimée proposée reste « suffisamment » proche de la valeur réelle. (On pourra observer les FIGURES 6.23, 6.24, 6.25 et 6.26 pour une simulation avec un estimateur à moindres carrés récurrents sans filtre.) Aussi, puisque l'on sait que, « dans de bonnes conditions », l'estimateur à moindres carrés converge asymptotiquement vers la valeur vraie, pour amoindrir l'effet des valeurs du régime transitoire de l'estimateur des moindres carrés, on peut utiliser un filtre $F(s)$. Ce filtre ne donne cependant aucune garantie. C'est pour cette raison qu'il est préférable d'utiliser un estimateur à erreur bornée. Concernant la convergence de l'estimateur à erreur bornée, on peut noter que l'estimateur prend en compte le fait qu'il puisse y avoir un décalage entre la sortie du modèle ($\hat{\theta}^T \phi$) et la sortie mesurée (y), sans a priori sur la nature de ce décalage. Aussi, pourrait-on s'attendre à ce que ce décalage impacte la valeur estimée de sorte que la valeur estimée ne puisse être donnée qu'avec une précision limite. En réalité, cette précision limite dépend bien plus de la quantité $\sqrt{\phi^T P \phi}$ (donc du signal d'entrée) que de w_{min} et w_{max} (en reprenant les notations du chapitre présentant l'estimateur à erreur bornée). Pour s'en convaincre, on peut examiner la situation dans le cas scalaire : (θ et ϕ scalaires).

$$w_{min} \leq \hat{\theta}\phi - y \leq w_{max} \quad (6.38)$$

et si par exemple $\phi > 0$ et $y = \theta\phi$, on obtient :

$$\begin{aligned} \theta\phi + w_{min} &\leq \hat{\theta}\phi \leq \theta\phi + w_{max} \\ \frac{\theta\phi + w_{min}}{\phi} &\leq \hat{\theta} \leq \frac{\theta\phi + w_{max}}{\phi} \end{aligned} \quad (6.39)$$

6.6.1 Evaluation de l'erreur de sortie pour l'estimateur à erreur bornée

Afin de proposer des valeurs pour w_{min} et w_{max} pour l'estimateur à erreur bornée (voir le chapitre concerné), on propose d'utiliser les outils de la μ -analyse. Pour se faire, on considère le schéma de la FIGURE 6.15, afin de rechercher une borne supérieure de $\|y - \phi^T \theta\|$ en fonction de l'entrée de la boucle fermée. En considérant Δ_δ LTV et $\|\Delta_\delta\| < 0.35$, les outils de la μ -analyse nous permettent de majorer $\frac{\|y_{diff}\|}{\|u\|}$. On obtient $\frac{\|y_{diff}\|}{\|u\|} < 23.8857$. Cependant, dans les simulations, nous utiliserons des valeurs pour w_{min} et w_{max} beaucoup plus petites, car la valeur obtenue est très conservative. Il est à noter, tout d'abord que ce calcul permet d'obtenir une borne sur $\|y - \phi^T \theta\|$ en ne considérant que des erreurs d'estimations. De plus, tout comme

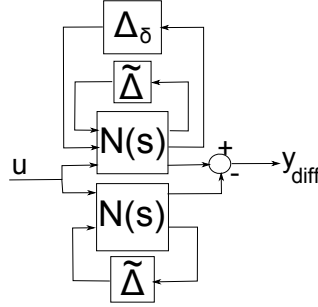


FIGURE 6.15 – Schéma pour la recherche d’une borne supérieure de l’erreur sur l’estimation.

précédemment, ce calcul ne permet d’obtenir que des ordres de grandeurs et ne constitue nullement des valeurs garanties dans la mesure où la boucle fermée auto-adaptative n’est pas linéaire.

6.6.2 Utilisation des estimateurs

Comme indiqué au paragraphe 5.5.1 (page 118) l’estimation des paramètres est obtenue à partir des mesures de l’état $x = [\alpha, q]^T$ et de l’entrée u du système. Ces signaux sont filtrés en utilisant un filtre passe-bas du second ordre $\left[\frac{1}{D(s)} \right]$ avec

$$D(s) = (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \quad (6.40)$$

et $\tau_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\tau_2 = \frac{\tau_1}{100}$.

L’estimateur est discret, et sa période d’échantillonnage est de 62.5 ms . A partir de l’équation (6.5), en supposant que $\phi(t) = [\alpha_f, q_f, u_f]^T$ et $\beta(t) = [\dot{\alpha}_f, \dot{q}_f]^T$, on obtient $\beta(t) = \Omega^T \phi(t)$. Alors, en utilisant un algorithme d’estimation par moindres carrés récursif ou par erreur bornée, une estimation $\hat{\Omega}$ est obtenue, et $\hat{\theta}$ est définie par $\hat{\theta}_1 = \hat{\Omega}_{1,2}$ et $\hat{\theta}_2 = \hat{\Omega}_{3,2}$. Donc, tous les cinq paramètres du modèle (6.5) sont estimés, mais uniquement M_α et M_u sont utilisés pour séquencer le gain LFT ($\theta = [M_\alpha, M_u]^T$).

6.6.3 Choix des paramètres des estimateurs

On considère que la période d’échantillonnage de l’estimateur est $T_{ech} = \frac{1}{16}$. En sortie de l’estimateur, on utilise un filtre en sortie de l’estimateur : $F(s) = 1 + (100 * T_{ech})s$.

6.7 Simulations temporelles

Le schéma de la simulation temporelle est décrit par la FIGURE 6.16.

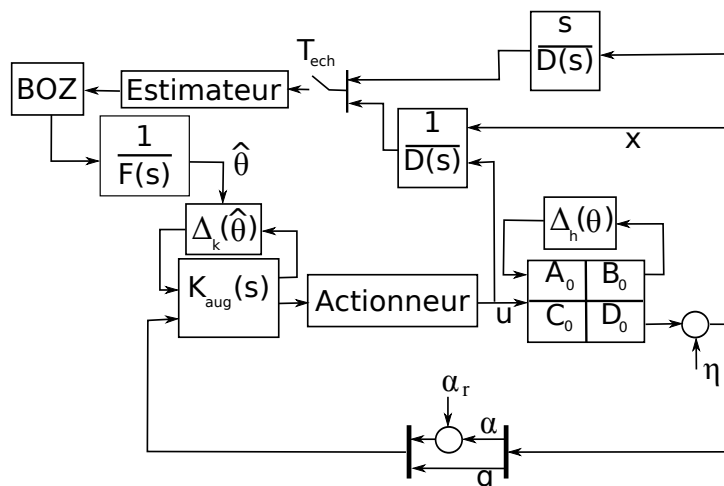


FIGURE 6.16 – Schéma de la simulation temporelle. (BOZ=Bloqueur d'Ordre Zero)

6.7.1 Une première simulation

Pour exécuter la simulation, les paramètres sont choisis de la manière suivante : $M_\alpha = 1.3 \times M_{\alpha 0}$; $M_u = 0.7 \times M_{u0}$; $M_q = 1.3 \times M_{q0}$; $Z_\alpha = 1.3 \times Z_{\alpha 0}$; $Z_u = Z_{u0}$. L'erreur relative d'estimation initiale était établie telle que $\delta\theta = [-0.3, 0.3]^T$. Pour cette première simulation, on utilise un estimateur à erreur bornée.

Le graphe 6.17 montre les réponses temporelles à l'entrée α_r (représenté sur le premier graphe, superposé avec α , en pointillé). Les courbes en pointillés ont été obtenues sans l'estimateur, et les paramètres du correcteur ne sont pas ajustés alors que celles qui sont en traits continus correspondent aux réponses temporelles avec l'estimateur. Les réponses temporelles lorsqu'il n'y a pas d'erreur d'estimation sont les courbes passant par les triangles. Le graphe 6.18 montre l'évolution des estimations.

On remarque que la réponse temporelle est améliorée lorsque l'estimateur est ajoutée et cette réponse est très proche de celle obtenue en l'absence d'erreur d'estimation. Le modèle proposé garantit de bonnes performances en dépit du correcteur initial inadéquat.

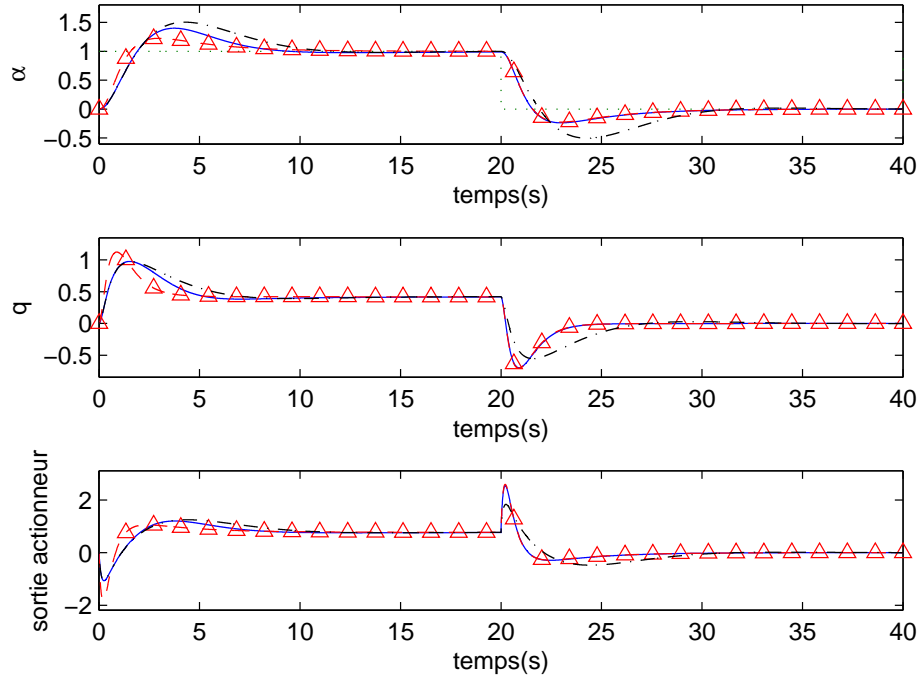


FIGURE 6.17 – Les réponses temporelles de la simulation. Les courbes en traits interrompus marquées de triangles, sont obtenues avec $\delta\theta = 0$, les courbes continues avec une erreur d'estimation initiale, et les courbes en trait et point sont réalisées sans estimateur, donc sans aucune correction sur l'erreur d'estimation.

6.7.2 D'autres simulations

On réalise les mêmes types de simulation dans différentes conditions. La TABLE 6.2 indique les conditions des autres simulations avec les graphiques des résultats correspondant.

- La simulation numérotée 2 est réalisée sans filtre.
- La simulation numérotée 4 est réalisée en présence de bruit sur α et q , dont la puissance est 10^{-4} .

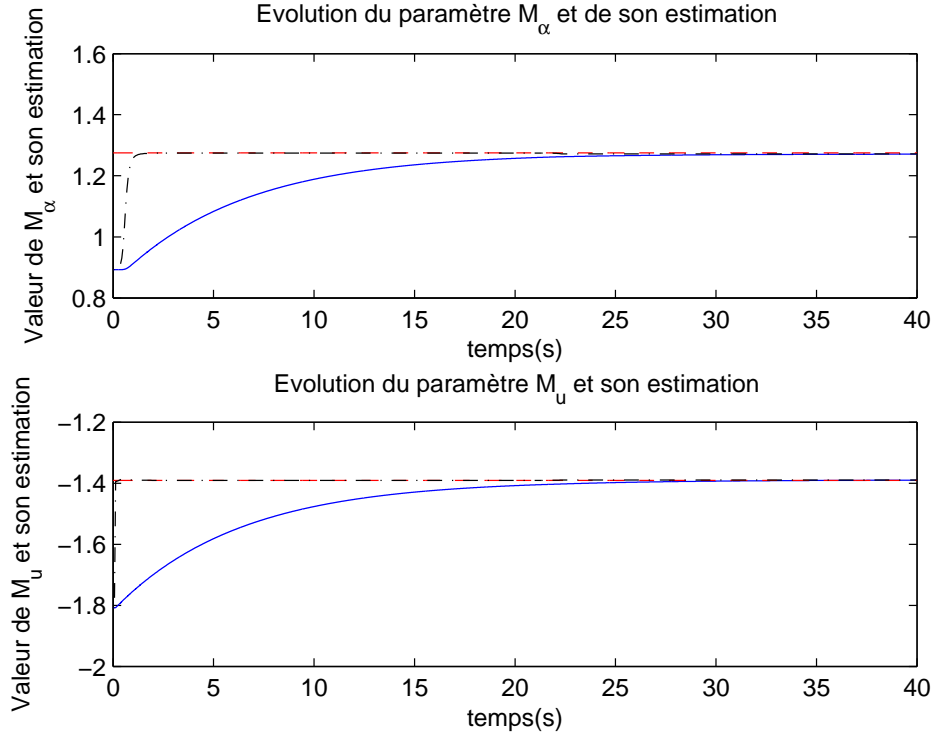


FIGURE 6.18 – Evolution des estimations pendant la simulation.

Simulations avec estimateur à moindres carrés récursif

Les FIGURES 6.21 et 6.22 représentent les valeurs obtenues lorsqu'un estimateur à moindres carrés récursif est utilisé. L'erreur initiale d'estimation est de 50% ($\delta\theta = [-0.5, 0.5]^T$). La simulation est initialisée avec $P = 0.01$.

Les FIGURES 6.23, 6.24, 6.25 et 6.26 représentent les valeurs obtenues lorsqu'un estimateur à moindres carrés récursif est utilisé. L'erreur initiale d'estimation est de 50% ($\delta\theta = [-0.5, 0.5]^T$). La simulation est initialisée avec $P = 10^3$. Les réponses sont obtenues en l'absence de filtre ($F(s)$) en sortie de l'estimateur.

Les FIGURES 6.27, 6.28, 6.29 et 6.30 représentent les valeurs obtenues lorsqu'un estimateur à erreur bornée est utilisé. L'erreur initiale d'estimation est de 50% ($\delta\theta = [-0.5, 0.5]^T$). La simulation est initialisée avec $P = \frac{1}{(0.5 \times 1.1)}$, $w_{min} = -0.01$ et $w_{max} = 0.01$.

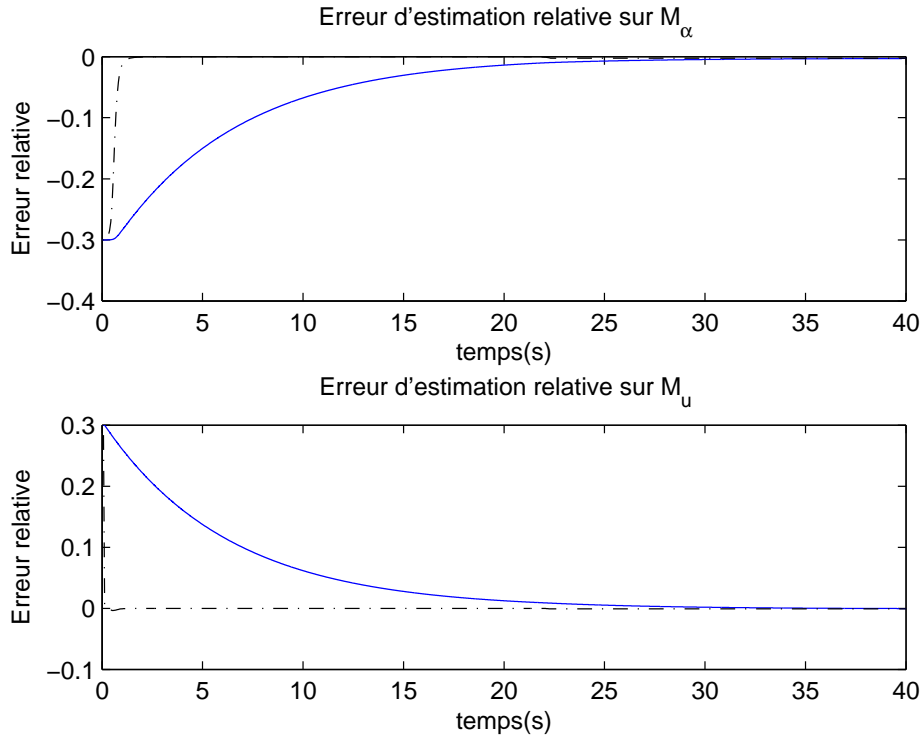


FIGURE 6.19 – Erreur d'estimation relative.

Simulations avec estimateur à erreur bornée

Les FIGURES 6.31, 6.32, 6.33 et 6.34 représentent les valeurs obtenues lorsqu'un estimateur à erreur bornée est utilisé. L'erreur initiale d'estimation est de 50% ($\delta\theta = [-0.5, 0.5]^T$). De plus, un bruit est introduit en sortie. La simulation est initialisée avec $P = \frac{1}{(0.5 \times 1.1)}$, $w_{min} = -7.5$ et $w_{max} = 7.5$.

6.8 Conclusion de l'application

Pour cette application, on a utilisé les techniques d'analyse et de synthèse robuste et de séquençement pour réaliser un correcteur adaptatif. Pour analyser la stabilité et les performances de la boucle fermée, et pour minimiser le temps de calcul de l'ajustement du correcteur, le procédé et le correcteur ont été modélisés sous forme LFT. Ce schéma permet l'utilisation d'algorithme de synthèse modale et la validation par des méthodes proches de la μ -analyse.

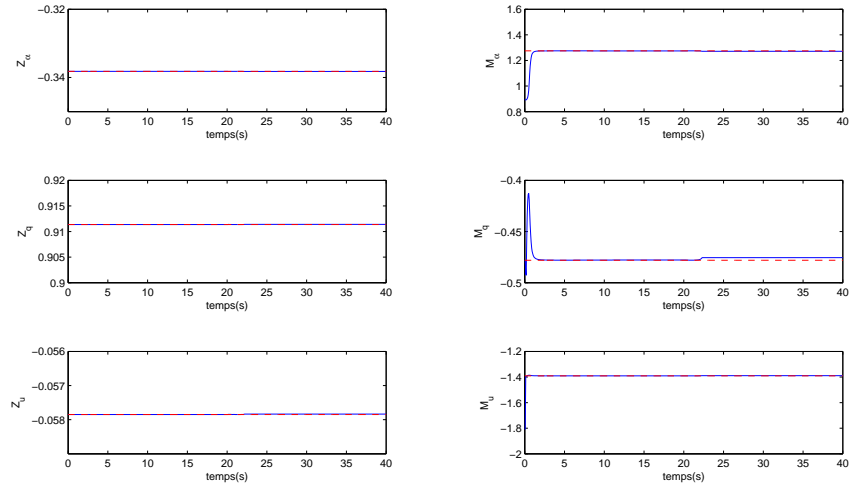


FIGURE 6.20 – Estimation de tous les paramètres

Dans cette application au problème d'un avion de transport, le schéma de commande adaptative rassemble un correcteur continu et un estimateur discret. Une amélioration de ce schéma pourrait être une adaptation des méthodes de synthèse à un procédé discret afin d'obtenir un correcteur discret, ou une adaptation des méthodes d'analyse afin de prendre en compte la nature hybride de ce schéma.

	Type	P initial	w	Erreur d'estimation initiale (en %)	FIGURES
1	M.C.R.	0.01		50%	6.21, 6.22
2	M.C.R.	10^3		50%	6.23, 6.24, 6.25, 6.26
3	E.B.	$\frac{1}{(0.5 \times 1.1)}$	0.01	50%	6.27 ; 6.28 ; 6.29 ; 6.30
4	E.B.	$\frac{1}{(0.5 \times 1.1)}$	7.5	50%	6.31 ; 6.32 ; 6.33 ; 6.34

TABLE 6.2 – « Type » de l'estimateur : M.C.R. : estimateur par Moindres Carrés Récursif ou E.B. : estimateur à Erreur Bornée. Pour l'estimateur à Erreur Bornée, on pose $w = |w_{min}| = |w_{max}|$ et $w_{min} = -w_{max}$. La colonne « P initial » indique la valeur de k telle que $P = k \times I_6$ (voir le chapitre sur les estimateurs pour plus de précision).

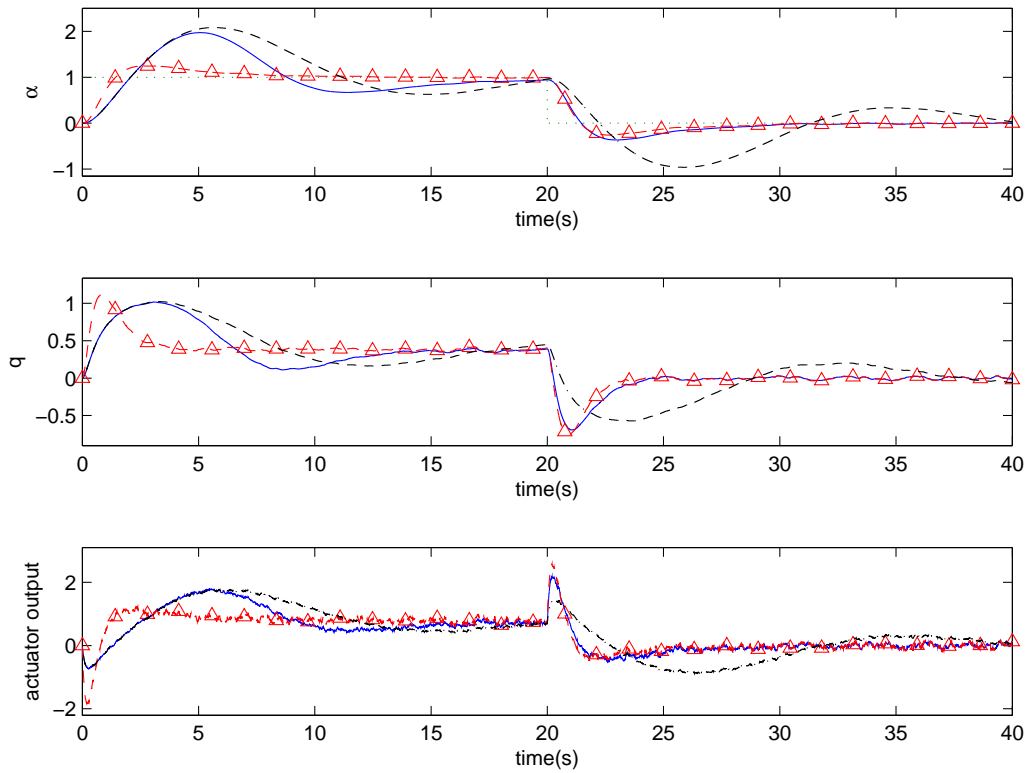


FIGURE 6.21 – Evolution temporelle de α et q .

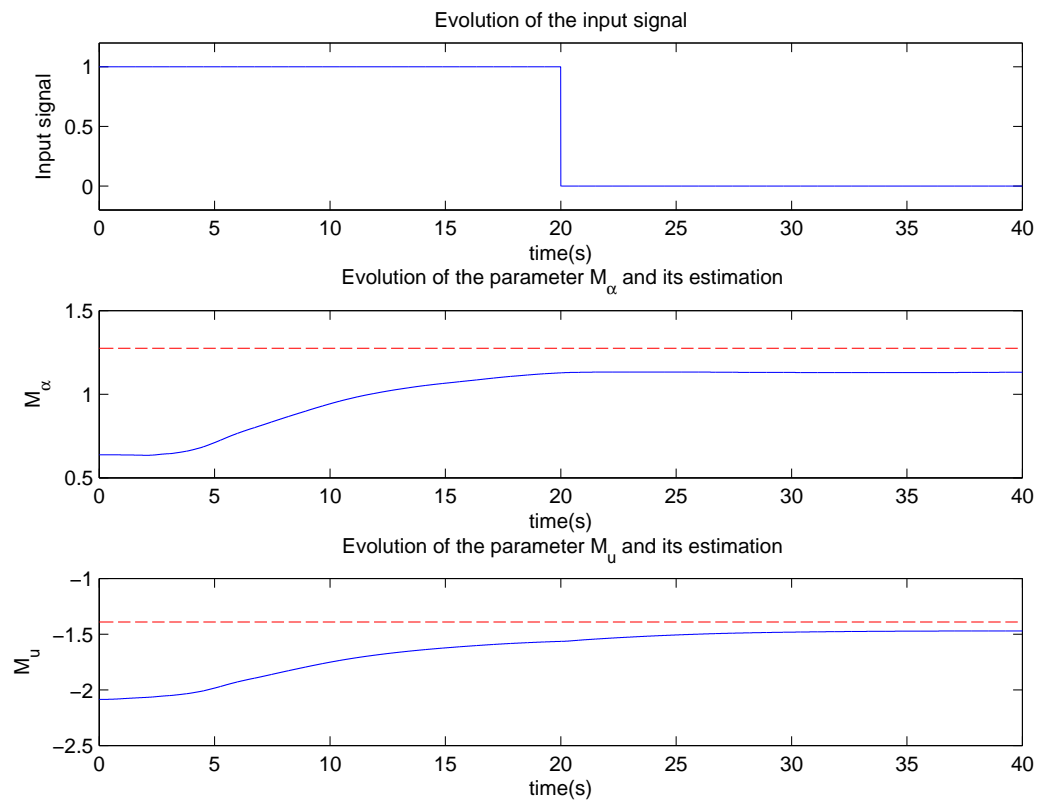


FIGURE 6.22 – Evolution des estimations pendant la simulation.

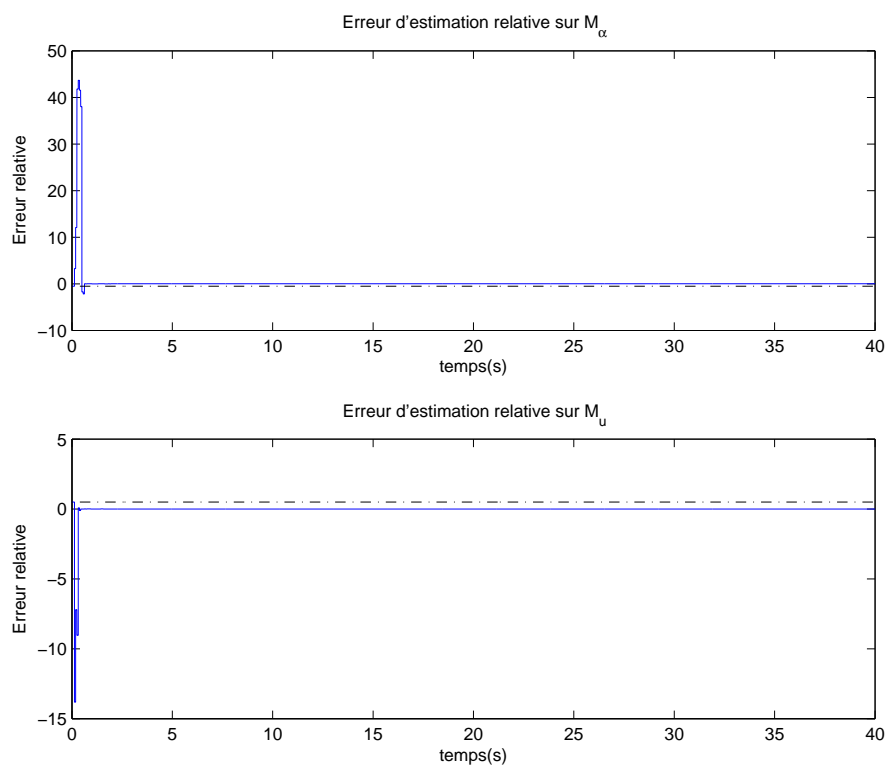


FIGURE 6.23 – Erreur d'estimation relative.

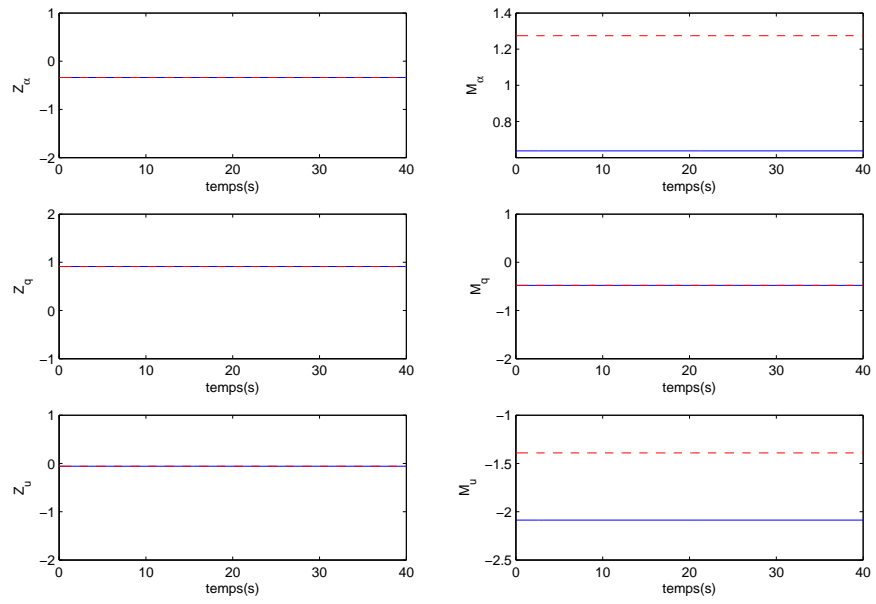


FIGURE 6.24 – Estimation de tous les paramètres

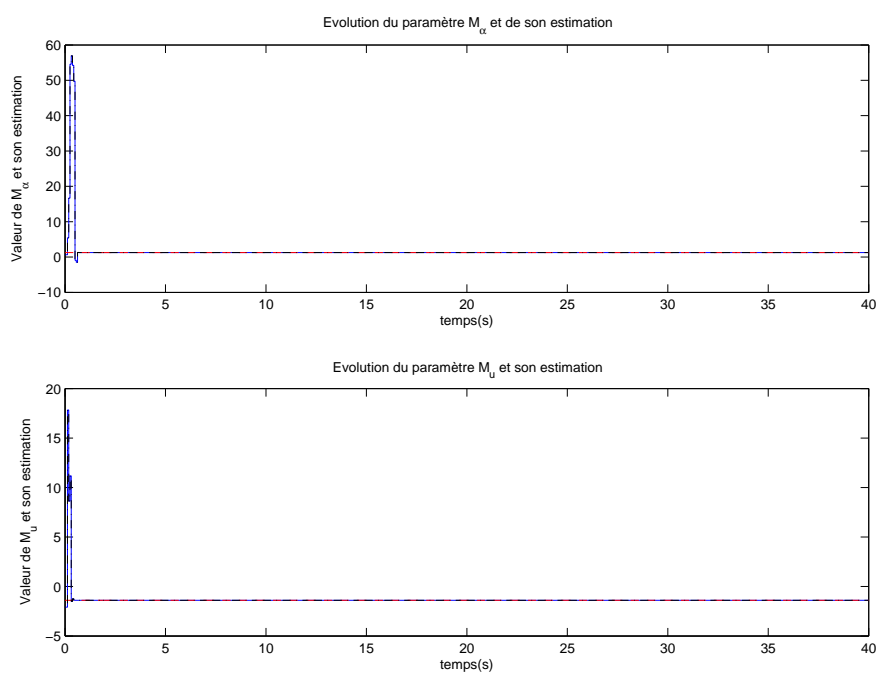


FIGURE 6.25 – Evolution des estimations pendant la simulation.

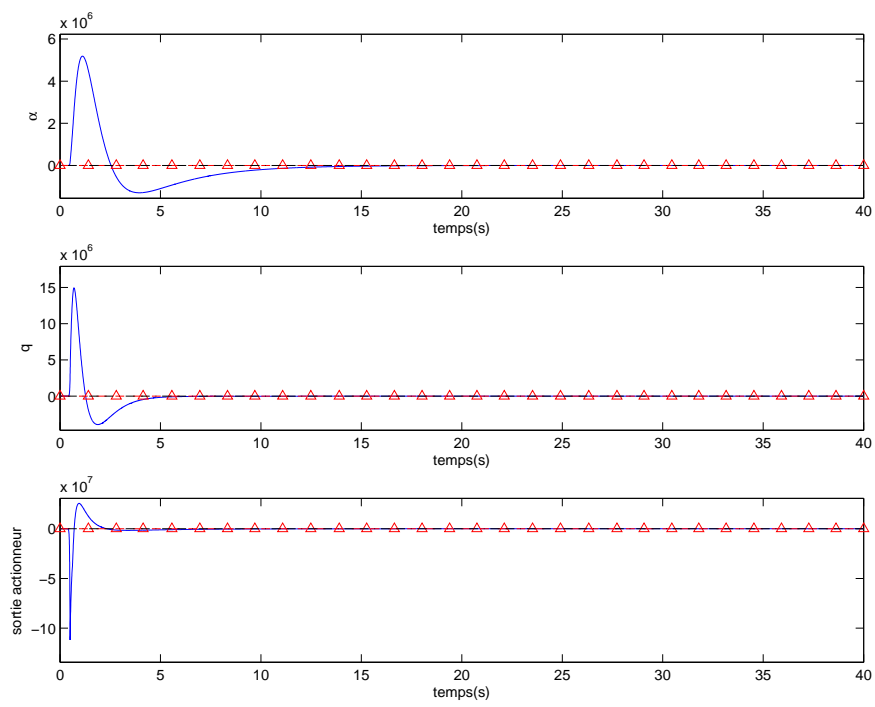


FIGURE 6.26 – Evolution temporelle de α et q .

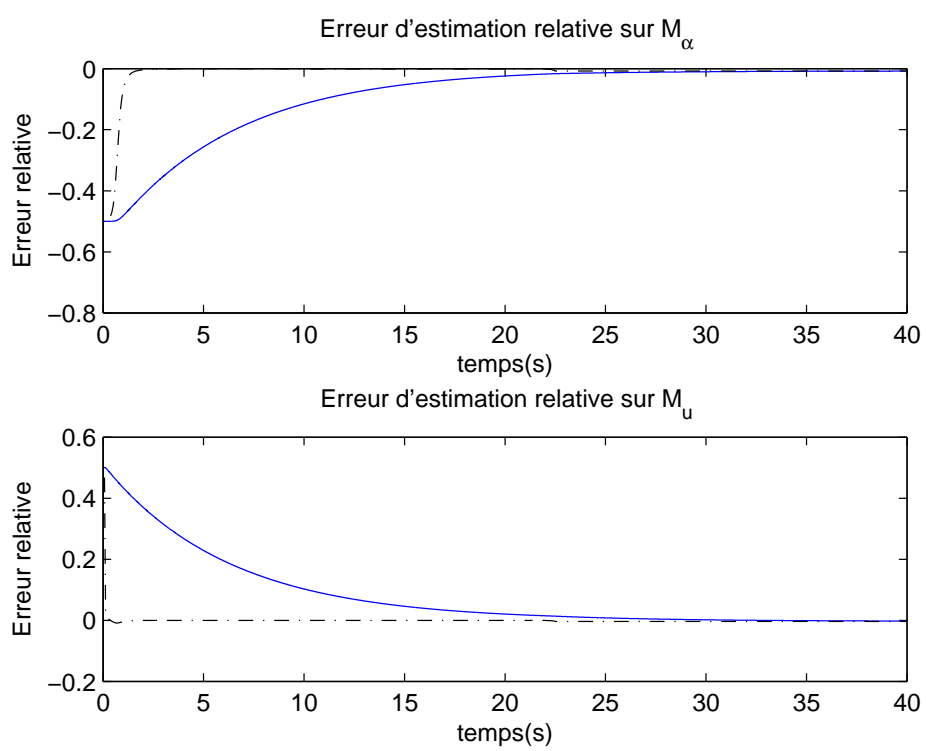


FIGURE 6.27 – Erreur d'estimation relative.

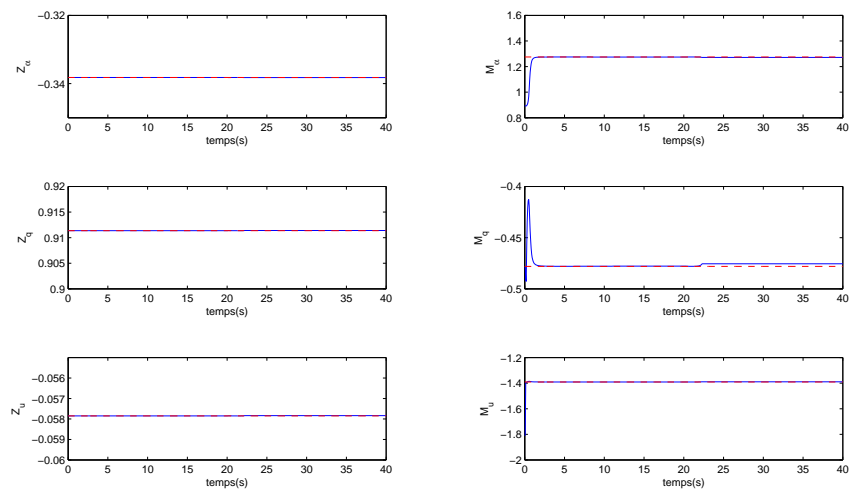


FIGURE 6.28 – Estimation de tous les paramètres

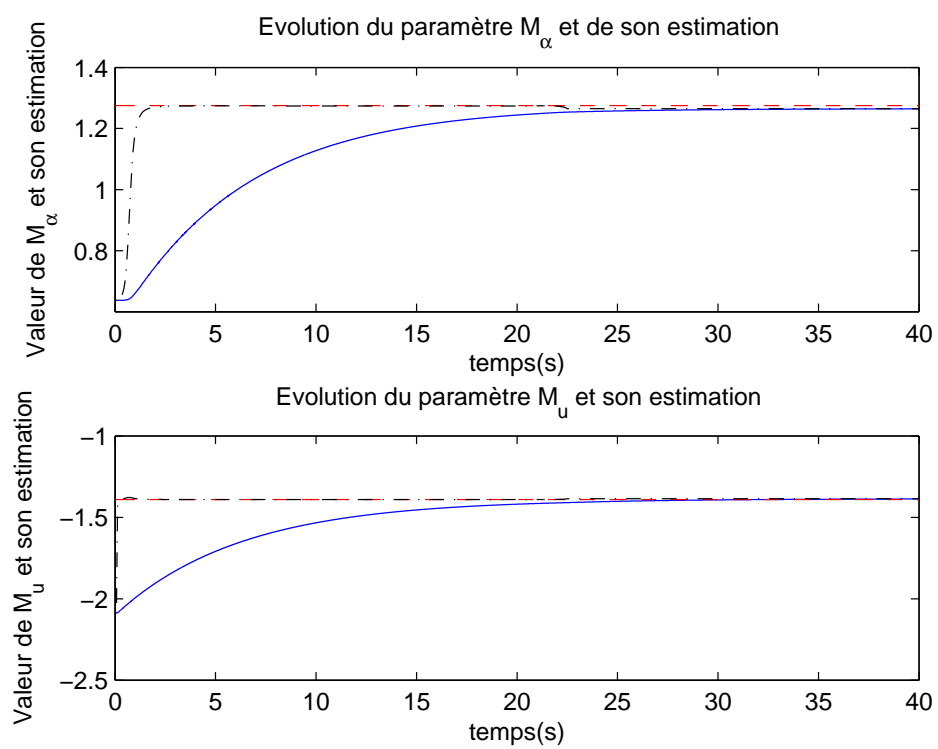


FIGURE 6.29 – Evolution des estimations pendant la simulation.

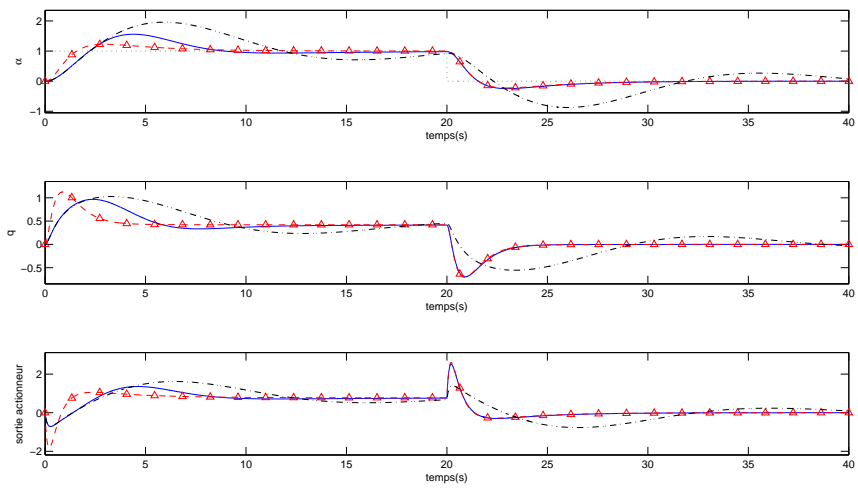


FIGURE 6.30 – Evolution temporelle de α et q .

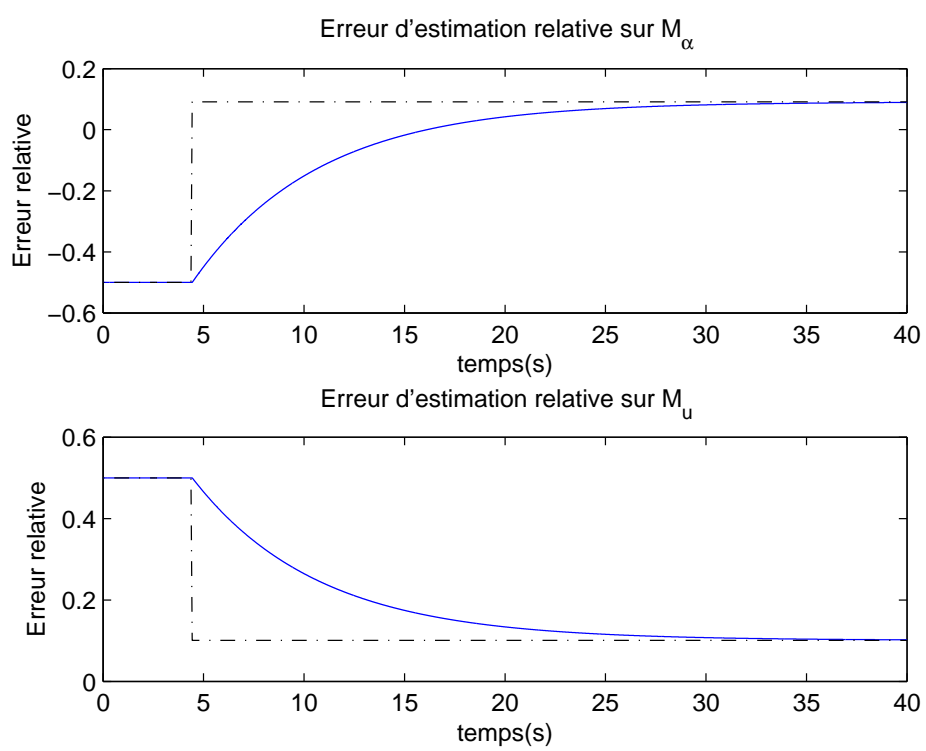


FIGURE 6.31 – Erreur d'estimation relative.

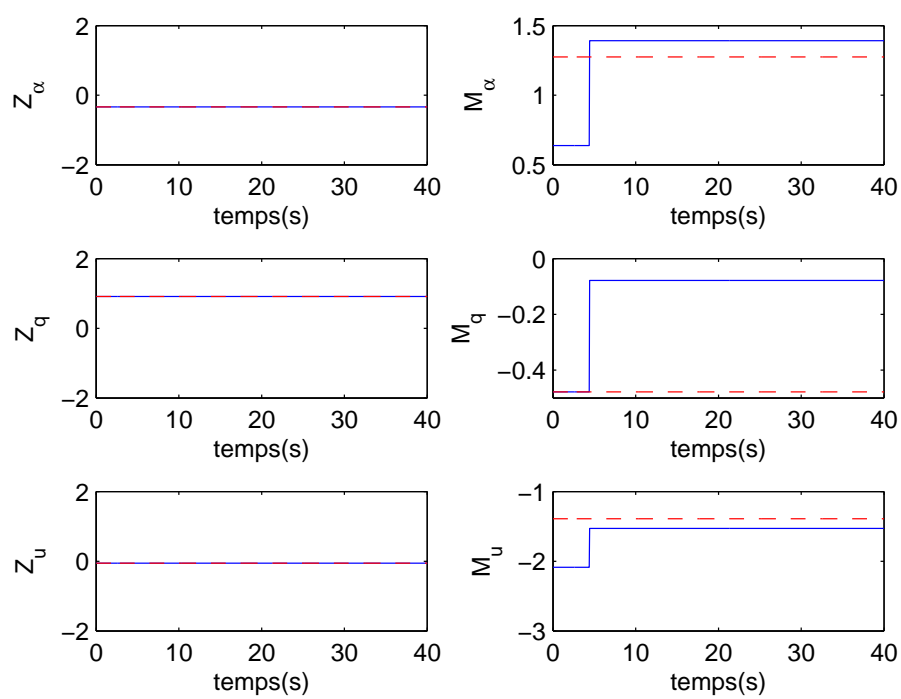


FIGURE 6.32 – Estimation de tous les paramètres

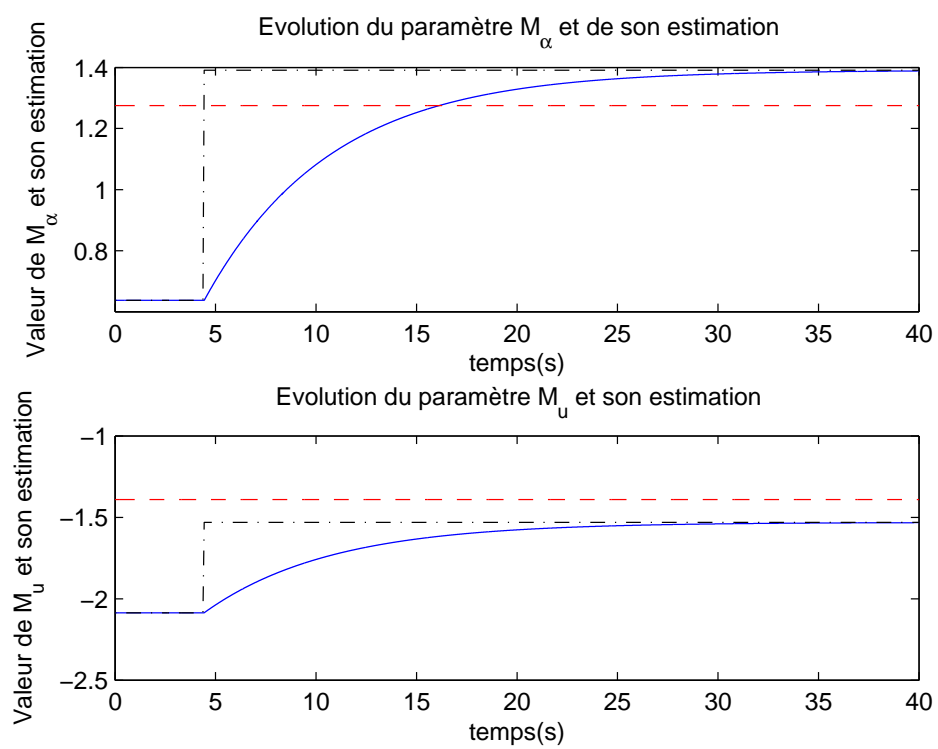


FIGURE 6.33 – Evolution des estimations pendant la simulation.

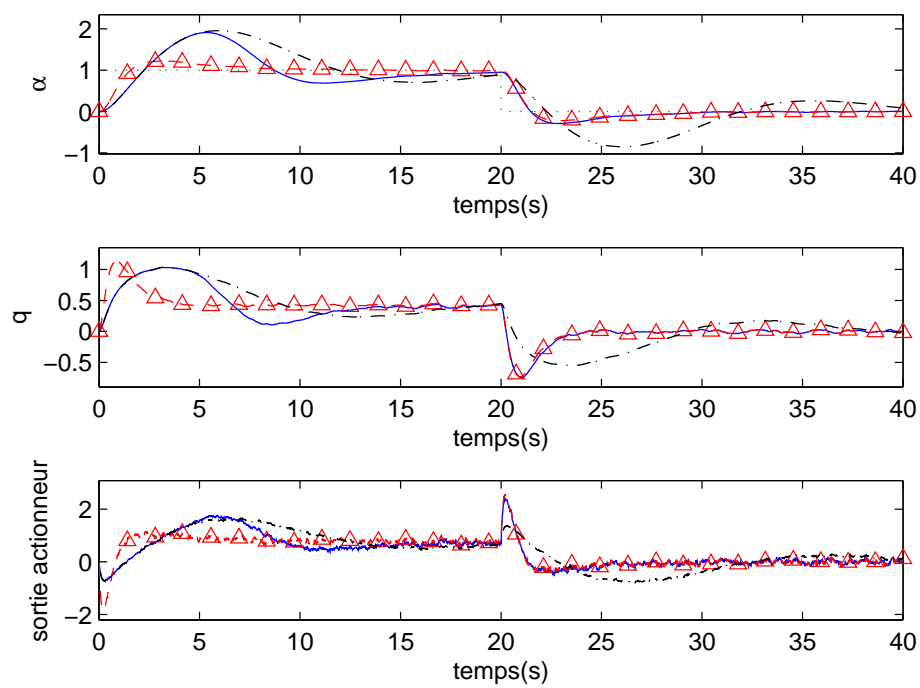


FIGURE 6.34 – Evolution temporelle de α et q .

Chapitre 7

Discussion et Conclusion

7.1 Discussion

Dans cette thèse, nous avons cherché à proposer une méthodologie de synthèse d'un correcteur auto-adaptatif en s'inspirant des correcteurs séquencés. Cependant, nous n'avons pas traité du choix des paramètres de séquençement. En effet, il a été décidé de prendre comme paramètres les éléments des matrices A et B de la représentation d'état du procédé $H(s, \theta)$, et on a supposé que l'état du système était mesuré dans sa totalité. Situation qui peut être représentée par l'équation suivante :

$$H(s, \theta) \begin{cases} \dot{x} &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= x \end{cases} \quad (7.1)$$

Même si la situation considérée paraît réaliste, le choix des paramètres de séquençement est une question difficile. Comme nous l'avons signalé précédemment, intuitivement on pourrait croire que plus on estime de paramètres, et mieux on peut contrôler le procédé. Mais nous avons aussi signalé que plus on estime de paramètres et plus on augmente le temps de calcul en ligne. Aussi, dans le cas général, ces paramètres ne peuvent pas être choisis de manière arbitraire. En effet, les paramètres que l'on peut estimer et la qualité de leurs estimations sont fonctions des signaux (d'entrée et de sortie du procédé) dont on dispose. Une étude plus approfondie sur ces problèmes pourrait donc être nécessaire.

Concernant la phase de synthèse du correcteur séquencé, nous avons choisi une méthode de placement de pôles, afin de minimiser le conservatisme dans cette phase. Mais il existe bien d'autres méthodes, et il pourrait être intéressant de chercher une méthode de synthèse permettant de majorer le gain du schéma non-linéaire dès cette phase.

Enfin, un dernier problème non-résolu a été soulevé au cours de cette thèse qui est l'interprétation des résultats d'analyse. En effet, nous avons vu que majorer la fonction de transfert de l'erreur d'estimation avec la norme $\|\cdot\|_2$ ne suffit pas pour garantir la stabilité de la boucle fermée non-linéaire. Donc la seule utilisation de l'estimateur à erreur borné ne permet pas de garantir la stabilité de la boucle fermée adaptative. Dans le cadre d'une étude sur ce problème, il pourrait être intéressant de comparer les résultats obtenus en considérant la majoration de l'erreur d'estimation avec une norme lipschitzienne, avec les travaux présentés dans la partie 4.6 page 105.

7.2 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons cherché à proposer une méthodologie de synthèse d'un correcteur auto-adaptatif afin de résoudre un problème de commande robuste d'un procédé linéaire incertain. Afin de palier aux limitations des solutions linéaires classiques, pour lesquelles un compromis doit être réalisé entre la robustesse et la performance, il a été proposé d'adopter le paradigme de la commande adaptative et d'utiliser un correcteur indirect, c'est à dire un correcteur dans lequel les fonctions d'estimation et de correction sont exprimées de manière explicite.

La méthodologie présentée se décompose en quatre étapes :

- Mise sous forme LFT du procédé
- Synthèse du correcteur
- Analyse hors ligne de la boucle fermée
- Synthèse de l'estimateur

Nous avons pu proposer une méthodologie pour synthétiser tous les éléments du correcteur auto-adaptatif. Cependant, il a été mis en évidence qu'il était nécessaire d'approfondir l'étude pour tirer meilleur parti des conclusions établies pendant la phase d'analyse.

Pour cette dernière, nous avons pu montrer qu'une condition suffisante pour garantir la stabilité était de majorer la norme $\|\cdot\|_{lip,2}$ de la fonction de transfert de l'erreur d'estimation. Toutefois, les informations apportées par cette majoration restent difficile à interpréter en termes de condition *suffisante* à respecter par l'estimateur pour garantir la stabilité. En effet, même si l'estimateur à erreur borné peut garantir la majoration de la fonction de transfert de l'erreur d'estimation par la norme $\|\cdot\|_2$, cela ne constitue qu'une condition nécessaire pour garantir la stabilité du schéma global de commande adaptative.

Mais il est à noter, qu'en dépit de cette lacune, nous avons pu mettre en évidence, au travers de l'exemple de la commande d'un avion, le bénéfice que

la stratégie proposée pouvait apporter à la commande d'un système linéaire incertain.

Appendices

Annexe A

Opérations sur les LFTs

Soient $\mathcal{F}_u(P, \Delta_p)$, $\mathcal{F}_u(Q, \Delta_q)$, $\mathcal{F}_u(R, \Delta_r)$, des LFTs.

A.1 Transposition

Si Δ_p est une matrice réelle diagonale.

$$(P \otimes \Delta_p)^T = P^T \otimes \Delta_p \quad (\text{A.1})$$

A.2 Addition

$$(P \otimes \Delta_p) + (Q \otimes \Delta_q) = \left(\begin{array}{cc|c} P_{11} & 0 & P_{12} \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ \hline P_{21} & Q_{21} & P_{22} + Q_{22} \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{cc} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_q \end{array} \right) \quad (\text{A.2})$$

A.3 Multiplication

$$(P \otimes \Delta_p) \times (Q \otimes \Delta_q) = \left(\begin{array}{cc|c} P_{11} & P_{12}Q_{21} & P_{12}Q_{22} \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22}Q_{21} & P_{22}Q_{22} \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{cc} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_q \end{array} \right) \quad (\text{A.3})$$

A.4 Concaténation

$$\left(\begin{array}{c|c} P \otimes \Delta_p & Q \otimes \Delta_q \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_{11} & 0 & P_{12} \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ \hline P_{21} & 0 & P_{22} \\ 0 & Q_{22} & Q_{22} \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{cc} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_q \end{array} \right) \quad (\text{A.4})$$

A.5 Juxtaposition

$$\left(\begin{array}{cc} \mathcal{F}_u(P, \Delta_p) & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_u(Q, \Delta_q) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} P_{11} & 0 & P_{12} & 0 \\ 0 & Q_{11} & 0 & Q_{12} \\ \hline P_{21} & 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & Q_{21} & 0 & Q_{22} \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{cc} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_q \end{array} \right) \quad (\text{A.5})$$

A.6 Inversion

Si P_{22} est inversible,

$$\mathcal{F}_u(P, \Delta_p)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} & P_{12}P_{22}^{-1} \\ \hline -P_{22}^{-1}P_{21} & P_{22}^{-1} \end{array} \right) \otimes \Delta_p \quad (\text{A.6})$$

Annexe B

Un contre exemple

Considérons le système dynamique LTV suivant :

$$\dot{x} = A(t)x \quad (\text{B.1})$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + a \cos^2(t) & 1 - a \cos(t) \sin(t) \\ -1 - a \cos(t) \sin(t) & -1 + a \sin^2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le spectre de $A(t)$, est l'ensemble suivant :

$$Sp(A(t)) = \left\{ \frac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a - 2 - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right\} \quad (\text{B.3})$$

Par conséquent, tant qu'on a $a < 2$, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ (fixé), le système d'équation $\dot{x} = A(t_0)x$ est stable. Cependant, en considérant le système LTV, on peut constater que l'évolution de l'état x est donné par $x(t) = \Phi(t, 0)x(0)$ avec :

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{(a-1)t} \cos(t) & e^{-t} \sin(t) \\ -e^{(a-1)t} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Donc pour $a > 1$, le système LTV est instable. Notons $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$, et définissons

$$M(s) = \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 + \frac{a}{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 + \frac{a}{2} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{B.5})$$

On a alors que $M(s)$ est un système LTI stable, et lorsque $\alpha = \frac{a}{2} \cos(2t)$ et $\beta = \frac{a}{2} \sin(2t)$, on a $M(s) \otimes \Delta = A(t)$.

Lorsque $a = 1.1$, on a :

$$\det(I_4 - M(s)\Delta) = \frac{1}{400s^2 + 360s + 481}(400s^2 + 360s - 400\alpha^2 - 400\beta^2 + 481) \quad (\text{B.6})$$

En notant $N(s)$ le numérateur de $\det(I_4 - M(s)\Delta)$, on a :

$$N(s) = (-400\omega^2 - 400\alpha^2 - 400\beta^2 + 481) + 360j\omega \quad (\text{B.7})$$

Par conséquent, pour avoir $N(s) = 0$, il faudrait avoir :

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \text{et} & \\ -400\omega^2 - 400\alpha^2 - 400\beta^2 + 481 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Or $|-400\alpha^2 - 400\beta^2| < 242 < 481$. On en conclut que $-400\alpha^2 - 400\beta^2 + 481 > 0$, et que $-400\omega^2 - 400\alpha^2 - 400\beta^2 + 481 = 0$ si et seulement si $\omega = \pm \frac{1}{20} \sqrt{\frac{481}{400} - \alpha^2 - \beta^2}$, et $\omega \neq 0$. En conclusion, on a que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\det(I_4 - M(j\omega)\Delta) \neq 0$, et pourtant, la boucle fermée est instable. On peut donc affirmer que $\mathcal{R}_{\underline{\Delta}_{LTI}} > \frac{1.1}{2}$, mais que $\mathcal{R}_{\underline{\Delta}_{LTV}} \leq \frac{1.1}{2}$.

Annexe C

Un exemple différenciant les normes 2 et Lipschitzienne

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit le système dynamique (\mathcal{S}) de E dans E défini comme suit :

$$(\mathcal{S}) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \mapsto & S(u) \end{array} \quad (\text{C.1})$$

avec pour tout $u \in E$:

- Si $\int_0^1 \|u(t)\|_2 dt < \frac{\sqrt{3}}{3}$, alors $S(u) = 0$.
- Sinon
 - $\forall t \in [0, 1], S(u)(t) = 0$;
 - $\forall t \geq 1, S(u)(t) = u(t-1)$

Pour tout $u \in E$ tel que $\int_0^1 \|u(t)\|_2 dt \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, on a

$$\|S(u)\|_2 = \|u\|_2 \quad (\text{C.2})$$

Un tel système a une norme 2 finie, mais n'est pas lipschitzien. En effet, soient

$$u_\infty : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{(1-t)} & \text{si } 1 \leq t \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

et

$$u_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{1}{k} \\ \frac{k}{k-1}t - \frac{1}{k-1} & \text{si } \frac{1}{k} \leq t \leq 1 \\ e^{(1-t)} & \text{si } 1 \leq t \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Les FIGURES C.1 et C.2 donnent des exemples de représentation de u_∞ et u_k . La quantité $\|S(u_\infty)\|_2 = \|u_\infty\|_2$ est finie, et $\|S(u_k)\|_2 = 0$.

$$\|S(u_\infty) - S(u_k)\|_2 = \|S(u_\infty)\|_2 = \|u_\infty\|_2 \quad (\text{C.5})$$

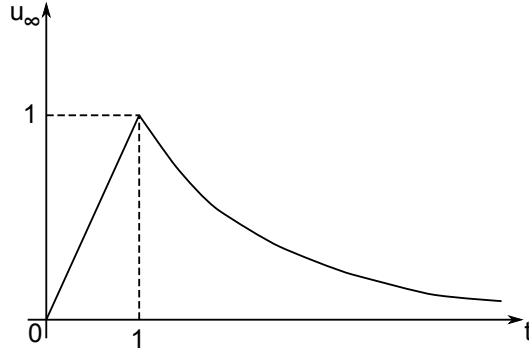


FIGURE C.1 – Représentation graphique de u_∞ .

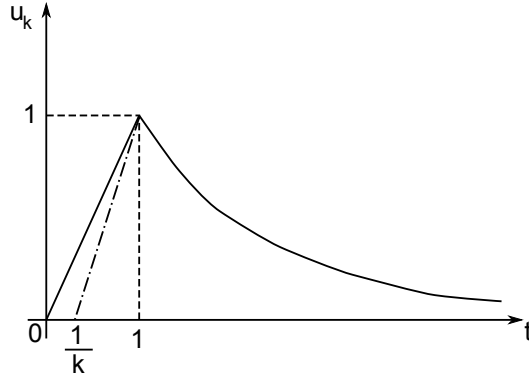


FIGURE C.2 – Représentation graphique de u_k .

et (\mathcal{S}) n'est pas lipschitzien.

$$\|u_\infty - u_k\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |u_\infty(t) - u_k(t)|^2 dt} = \frac{1}{k\sqrt{3}} \quad (\text{C.6})$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note $PE(x) \in \mathbb{N}$ la partie entière de x , définie par :

$$PE(x) \leq x < PE(x) + 1 \quad (\text{C.7})$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $k_0 = -PE(-\frac{\alpha}{\|u_\infty\|_2\sqrt{3}}) + 1$. On a alors :

$$\alpha\|u_\infty - u_{k_0}\|_2 = \frac{\alpha}{k_0\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{\sqrt{3} - PE(-\frac{\alpha}{\|u_\infty\|_2\sqrt{3}}) + 1} < \|u_\infty\|_2 \quad (\text{C.8})$$

En définitive, on a donc

$$\|S(u_\infty) - S(u_{k_0})\|_2 = \|S(u_\infty)\|_2 = \|u_\infty\|_2 > \alpha\|u_\infty - u_{k_0}\|_2 \quad (\text{C.9})$$

Bibliographie

- [1] D. ALAZARD, C. CUMER, P. APKARIAN, M. GAUVRIT et G. FERRERES : *Robustesse et commande optimale*. Cépaduès Editions, 2000.
- [2] P. ANTOINETTE et G. FERRERES : Robust gain scheduling techniques for adaptive control. *Proc. of the ECC*, 2009.
- [3] P. APKARIAN et R.J. ADAMS : Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):21–32, January 1998.
- [4] K.J. ASTROM : Theory and applications of adaptive control A Survey. *Automatica*, 19(5):471–486, 1983.
- [5] K.J. ASTROM : Adaptive feedback control. *Proceedings of the IEEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 75(2):186–218, February 1987.
- [6] K.J. ASTROM : Tuning and adaptation. *In IFAC 13th Triennial World Congress, San Francisco, USA*, 1996.
- [7] K.J. ASTROM et P. EYKHOFF : System identification-a survey. *Automatica*, 7:123, 1971.
- [8] K.J. ASTROM et B. WITTENMARK : *Adaptive control*. Addison-Wesley, 1989.
- [9] I. BARKANA : Classical and simple adaptive control for nonminimum phase autopilot design. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 28(4):631–638, 2005.
- [10] I. BARKANA : Simple adaptive control-a stable direct model reference adaptive control methodology-brief survey. *In IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, 2007.
- [11] R.E. BELLMAN : *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [12] R.E. BELLMAN : *Adaptive Control Processes : A Guided Tour*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961.

- [13] S. BOYD, L. EL GHAOU, E. FERON et V. BALAKRISHNAN : *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. SIAM, 1994.
- [14] R.P. BRAATZ, P.M. YOUNG, J.C. DOYLE et M. MORARI : Computational complexity of μ calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1000–1002, 1994.
- [15] C.J. CHIEN, K.C. SUN, A.C. WU et L.C. FU : A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants. *Automatica*, 32(6): 833–848, 1996.
- [16] A. DATTA et P.A. IOANNOU : Performance improvement versus robust stability in model reference adaptive control. *In Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1082–1087, December 1991.
- [17] P. DE LARMINAT : *Commande adaptative : Aspects Pratiques et Théoriques*. Masson, Paris, 1986.
- [18] C. DURIEU, B.T. POLYAK et E. WALTER : Ellipsoidal state outer-bounding for mimo systems via analytical techniques. *In CESA'96 IMACS Multiconference : computational engineering in systems applications*, pages 843–848, 1996.
- [19] C. DURIEU, B.T. POLYAK et E. WALTER : Trace versus determinant in ellipsoidal outer-bounding with application to state estimation. *In Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, pages 43–48, 1996.
- [20] B. EGARDT : Stability of adaptive controllers. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 20, 1979.
- [21] M.K.H. FAN, A.L. TITS et J.C. DOYLE : Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1):25 – 38, 1991.
- [22] A.A. FEL'DBAUM : *Optimal control systems*. Academic Press, 1965.
- [23] G. FERRERES : *A practical approach to robustness analysis with aeronautical applications*. Plenum Press / Kluwer Academic / Springer Verlag, 1999.
- [24] G. FERRERES : A Convex Control Design (CCD) toolbox with frequency-domain specifications. *available on the author's homepage*, 2004-2009.
- [25] G. FERRERES et P. ANTOINETTE : Convex gain-scheduled control of an lft model. *In Proceedings of the European Control Conference 2009*, pages 1650–1655, 2009.
- [26] G. FERRERES et P. ANTOINETTE : Commande adaptative à base d'auto-séquencement et de robustesse. *Journal européen des systèmes automatisés*, 45(4-6):279–298, 2011.

- [27] G. FERRERES et J.M. BIANNIC : A Skew Mu Toolbox (SMT) for robustness analysis. *available on the authors' homepages*, 2003-2009.
- [28] G. FERRERES, V. FROMION et M. M'SAAD : Adaptive H_∞ control using coprime factors and set-membership identification : the nonlinear case. *Proceedings of the NOLCOS*, 1:227–232, 1995.
- [29] G. FERRERES, J.F. MAGNI et J.M. BIANNIC : Robustness analysis of flexible structures : practical algorithms. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13:715–734, 2003.
- [30] G. FERRERES et C. ROOS : Robust feedforward design in the presence of LTI/LTV uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(14):1278–1293, september 2007.
- [31] A.P. FEUERSÄNGER : *Control of an aircraft with reduced stability*. Thèse de doctorat, SUPAERO, Toulouse, France, 2007.
- [32] C. FIELDING : Application of μ -analysis to flight control systems. *In Minutes of the First Meeting of GARTEUR FM (AG11), Appendix D*, volume 1, May 1999.
- [33] N.M. FILATOV et H. UNBEHAUEN : Survey of adaptive dual control methods. *IEEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 147(1): 120–130, January 2000.
- [34] A.L. FRADKOV : Continuous-time model reference adaptive systems-an east-west review. *In Proceedings of the IFAC Symposium on Adaptive Control and Signal Processing*, July 1992.
- [35] V. FROMION, M.G. SAFONOV et G. SCORLETTI : Necessary and sufficient conditions for lur'e system incremental stability. *In European Control Conference, Cambridge, UK*, 2003.
- [36] J.J. FUCHS : Indirect stochastic adaptive control : The general delay-colored noise case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(2):470–472, 1982.
- [37] F. GIRI, M. M'SAAD, J.M. DION et L. DUGARD : On the robustness of discrete-time indirect adaptive (linear) controllers. *Automatica*, 27(1): 153–159, 1991.
- [38] G.C. GOODWIN, P.J. RAMADGE et P.E. CAINES : Discrete-time multivariable adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):449–456, 1980.
- [39] G.C. GOODWIN et K.C. SIN : *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice Hall, 1984.
- [40] C.J. HARRIS et SA BILLINGS : *Self-tuning and adaptive control : theory and applications*. Peter Peregrinus, 1985.

- [41] P.A. IOANNOU et A. DATTA : *Robust Adaptive Control : Design, Analysis and Robustness Bounds*. Springer-Verlag, 1991.
- [42] P.A. IOANNOU et P.V. KOKOTOVIC : Adaptive systems with reduced models. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 47, 1983.
- [43] P.A. IOANNOU et J. SUN : Theory and design of robust direct and indirect adaptive control schemes. *International Journal of Control*, 47(3):775–813, 1988.
- [44] RE KALMAN : Design of a self-optimizing control system. *Transaction of the ASME*, 80(2):468–478, 1958.
- [45] I. KANELAKOPOULOS : *Adaptive Control of Nonlinear Systems*. Thèse de doctorat, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1992.
- [46] P.V. Kokotovic KANELAKOPOULOS, I. et A.S. MORSE : Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1241–1253, 1991.
- [47] H.K. KHALIL : *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Company, 1992.
- [48] J.M. KRAUSE, G. STEIN et P.P. KHARGONEKAR : Sufficient conditions for robust performance of adaptive controllers with general uncertainty structure. *Automatica*, 28(2):277–288, 1992.
- [49] I.D. LANDAU : *Adaptive Control : The Model Reference Approach*. Marcel Dekker, Inc., 1979.
- [50] ID LANDAU, R. LOZANO et M. M'SAAD : *Adaptive control. (Communications and control engineering)*. Springer, 1998.
- [51] Ioan Doré LANDAU et Alina BESANÇON-VODA : *Identification des systèmes (Traité IC2, série systèmes automatisés)*. Hermès, Paris, 2001.
- [52] D.J. LEITH et W.E. LEITHEAD : Survey of gain scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, 73(11):1001–1025, 2000.
- [53] J.F. MAGNI : Presentation of the Linear Fractional Representation Toolbox (LFRT). *Proc. IEEE CACSD, Glasgow, UK*, 2002.
- [54] J.F. MAGNI : Linear Fractional Representation Toolbox. *Available on the author's homepage*, 2004-2008.
- [55] J.F. MAGNI : An LFT approach to robust gain scheduling. *Proc. of the IEEE conference on Decision and Control, Seville, Spain*, 2005.
- [56] J.F. MAGNI, A. KNAUF et C. DOLL : Practical implementation of LFT-scheduled feedback gains. *Proc. of the Asian Control Conference*, 2006.
- [57] G. MEINSMA, T. IWASAKI et M. FU : When is (D,G)-scaling both necessary and sufficient. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(9):1755–1759, 2000.

- [58] N. MINORSKY : Directional stability of automatically steered bodies. *Journal of American Society of Naval Engineers*, 34(2):280–309, 1922.
- [59] A.S. MORSE : Global stability of parameter adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25:433–439, 1980.
- [60] M. M'SAAD et J. CHEBASSIER : *Commande adaptative des systemes*. Techniques de l'Ingénieur, 2000.
- [61] K.S. NARENDRA et A.M. ANNASWAMY : *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, 1989.
- [62] K.S. NARENDRA et R.V. MONOPOLI : *Applications of Adaptive Control*. Academic Press, 1980.
- [63] Y.H. Lin NARENDRA, K.S. et L.S. VALAVANI : Stable adaptive controller design, part ii : Proof of stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):440–448, 1980.
- [64] U.S. Department of DEFENSE : Department of defense interface standard, flying qualities of piloted aircraft. MIL-STD-1797. Rapport technique, U.S. Department of Defense, 1995.
- [65] R. ORTEGA et T. YU : Robustness of adaptive controllers : A survey. *Automatica*, 25(5):651–678, 1989.
- [66] PV OSBURN, H. WHITAKER et A. KEZER : New developments in the design of model reference adaptive control systems. *In Proc. Institute of the Aerospace Sciences 29th Annu. Meeting, New York*, 1961. Paper No.61-39.
- [67] D. PEAUCELLE, A. DROUOT, C. PITTET et J. MIGNOT : Simple adaptive control without passivity assumptions and experiments on satellite attitude control demeter benchmark. *In Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2010.
- [68] C.E. ROHRS, L. VALAVANI, M. ATHANS et G. STEIN : Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9):881–889, 1985.
- [69] W.J. RUGH et J.S. SHAMMA : Research on gain scheduling. *Automatica*, 36:1401–1425, 2000.
- [70] C. SAMSON : Stability analysis of adaptively controlled systems subject to bounded disturbances* 1. *Automatica*, 19(1):81–86, 1983.
- [71] G.N. SARIDIS : *Self organizing control of stochastic systems*. Marcel Dekker, 1977.
- [72] S. SASTRY : *Nonlinear systems : analysis, stability and control*. Springer Verlag, 1999.

- [73] David SAUSSIÉ : *Contrôle du vol longitudinal d'un avion civil avec satisfaction de qualités de manœuvrabilité*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique de Montréal, Montréal, Canada, 2010.
- [74] C.W. SCHERER et S. WEILAND : Lecture notes disc course on linear matrix inequalities in control. Notes de cours, 1999.
- [75] M. STEINBUCH, J.C. TERLOUW et O.H. BOSGRA : Robustness analysis for real and complex perturbations applied to an electro-mechanical system. *In Proceedings of the American Control Conference*, pages 556–561, 1991.
- [76] J. SUN : A modified model reference adaptive control scheme for improved transient performance. *In Proceedings of 1991 American Control Conference*, pages 150–155, June 1991.
- [77] G. TAO : *Adaptive Control Design and Analysis (Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control Series)*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 2003.
- [78] L.W. TAYLOR et E.J. ADKINS : Adaptive control and the x-15. *In Proceedings of Princeton University Conference on Aircraft Flying Qualities*. Princeton University Press, 1965.
- [79] P. TOMEI : Robust adaptive control with arbitrary transient performance and disturbance attenuation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):654–658, 1999.
- [80] K.S. TSAKALIS et P.A. IOANNOU : *Linear Time Varying Systems : Control and Adaptation*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [81] T.C. TSAO et M.G. SAFONOV : Convex set theoretic adaptor control systems. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 582–584, 1993.
- [82] T.C. TSAO et M.G. SAFONOV : Set theoretic adaptor control systems. *Proceedings of the ACC*, pages 3043–3047, 1993.
- [83] T.C. TSAO et M.G. SAFONOV : Unfalsified direct adaptive control of a two-link robot arm. *Proc. of the IEEE international Conference on Control Applications*, pages 680–686, 1999.
- [84] Yakov Z. TSYPKIN : *Adaptation and Learning in Automatic Systems*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1971. Translator-Nikolic, S. J.
- [85] Y.Z. TSYPKIN : *Adaptation and Learning in Automatic Systems*. Academic Press, 1971.
- [86] H. UNBEHAUEN : *Methods and Applications in Adaptive Control*. Springer-Verlag, 1980.

- [87] H.P. WHITAKER, J. YAMRON et A. KEZER : *Design of Model Reference Adaptive Control Systems for Aircraft*. M.I.T. Press, 1958.
- [88] G. ZAMES : Adaptive feedback, identification and complexity : An overview. *In Proceedings on the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 2068–2075, December 1993.
- [89] Y. ZHANG, C. WEN et Y.C. SOH : Robust decentralized adaptive stabilisation of interconnected systems with guaranteed transient performance. *Automatica*, 36:907–915, 2000.
- [90] K. ZHOU, J.C. DOYLE et K. GLOVER : *Robust and optimal control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1996.

Résumé

Pour synthétiser un correcteur robuste pour un système linéaire incertain, il existe de nombreuses méthodes linéaires. Cependant, bien souvent, le gain en robustesse se fait au détriment de la performance. Aussi, dans cette thèse, on s'intéresse à la situation où la plage des valeurs possibles des paramètres est "très grande" par rapport à la "faible" variation du niveau de performance souhaité. Dans cette situation, il peut alors s'avérer intéressant d'utiliser des correcteurs séquencés. Seulement, la mise en place de cette solution nécessite que le correcteur ait à sa disposition les paramètres sur lesquels il sera séquencé. Et il peut arriver que l'on ne souhaite pas (à cause de considérations de réalisation pratique), ou que l'on ne puisse pas disposer de la mesure de ces paramètres. On est alors amené à estimer ces paramètres et donc à utiliser le paradigme de la commande adaptative.

Dans cette thèse, on cherche à proposer une méthodologie de synthèse d'un correcteur auto-adaptatif afin de résoudre un problème de commande robuste d'un procédé linéaire incertain. Après une étude théorique ayant pour objectif de proposer une telle méthodologie, le cas d'un avion instable est traité à titre d'application, permettant ainsi de mettre en évidence le bénéfice que la stratégie proposée peut apporter à la commande d'un système incertain.

Mots-clés : Commande robuste, Commande adaptative, Auto-séquencement, Système incertain.

Abstract

Many linear methods exist to design a robust controller for an uncertain linear system. This thesis considered the situation where the range of possible values of parameters is "very large" in relation to "small" variations in the desired level of performance. Frequently, an increase in robustness is obtained at the expense of a performance loss. The use of scheduled controllers may be an innovative way to address this problem. The implementation of this solution requires the controller has at its disposal the parameters on which the scheduling is done. However, it may occur that making the measure of the parameters available is not desired (for example, because of practical implementation aspects) or not possible. In these situations, the designer of the controller is led to estimate these parameters and then to use the paradigm of adaptive control.

This thesis explored a methodology for designing an adaptive controller in which to solve the problem of robust control for an uncertain linear plant. A theoretical study was first undertaken which aimed to propose such a methodology; followed by, a study of the case of an unstable airplane as an application. Such an analysis highlighted the benefits that the proposed strategy can bring to the control for an uncertain plant.

Keywords : Robust control, Adaptive control, Gain scheduling, Uncertain system.